Sommes, produits

Exercice 1 (⋆ Cal)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes/produits suivants :

a) $\sum_{k=0}^{n} x$ b) $\sum_{k=0}^{n} k$ c) $\sum_{k=0}^{n} x^k$

d) $\prod_{k=0}^{n-1} x$ e) $\prod_{k=1}^{n} k$ f) $\prod_{k=0}^{n} x^k$

g) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$ h) $\sum_{k=0}^{n} (2^k+4k+n-3)$ i) $\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$

j) $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$ k) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ l) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

m) $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k$ n) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$ o) $\prod_{\ell=1}^{n} \ell \mathrm{e}^{-\ell}$

p) $\prod_{k=1}^{n} (2k)$ q) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2-k}{2k^2+\cos(k)+1}$ r) $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$

s) $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ t) $\sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{k}{n}\right)$ u) $\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{i+2}{i}\right)$

v) $\sum_{k=1}^{2024} j^k$ w) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} 3^{n-k}$ x) $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1}$

y) $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \quad \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ z) $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} \quad p \in \mathbb{N}$

Exercice 2 (⋆⋆ Cal, Rai)**.** Calculons $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3$ (sans procéder par récurrence car cela nécessite d'avoir une idée de la valeur de la somme).

1. Calculer de deux façons $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3$
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
3. Adapter ce qui précède pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 3 (⋆⋆ Rai, Rec, Cal ©)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \left]0\,;2\pi\right[$, calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.

Exercice 4 (⋆ Rai ©)**.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Exercice 5 (𝄞⋆ Cal, Rai)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire la valeur des sommes A_n et B_n où l'on a posé :

$$A_n = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$$

Exercice 6 (⋆ Cal)**.** En utilisant la forme factorisée et la forme développée de $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes :

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$
4. $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$

Exercice 7 (⋆⋆ Rai ©)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. À l'aide du changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Exercice 8 (⋆ Rai, Cal ©)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

1. Écrire $z = (1+\mathrm{i})^{2n}$ sous forme trigonométrique.
2. En déduire la valeur des sommes S_n et T_n.

Exercice 9 (⋆⋆ Rai, Cal ©)**.**

1. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. En dérivant l'expression obtenue à la question précédente, calculer $\sum_{k=0}^{n} kx^k$.
3. Adapter ce qui précède au calcul de $\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{e}^{kx}$.

Exercice 10 (⋆ Rai)**.** Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ une famille de réels positifs ou nuls.

1. Montrer proprement que $\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 0$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ implique que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $a_k = 0$.

Exercice 11 ($\star$ Rai ©)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

Exercice 12 ($\star\star\star$ Rai)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$ et $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = n$. Montrer que pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $a_k = 1$

Exercice 13 ($\star$ Rai, Rec ©)**.**

1. Démontrer que $2 - \sqrt{3} \in]\, 0 ; 1 \,[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe a_n et b_n deux entiers tels que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$.
3. Calculer alors $(2 - \sqrt{3})^n$.
4. $\star\star$ On pose $u_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14 ($\star$ Cal)**.** Linéariser $\cos^6(\theta)$.

Exercice 15 ($\star$ Cal)**.** Exprimer $\cos(6\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Exercice 16 ($\star\star$ Rec, Rai, Cal ©)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$

1. Montrer que, $\arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right) = \arctan(x + 1) - \arctan x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur de S_n ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Sommes doubles

Exercice 17 ($\star$ Cal ©)**.** Soit n un entier naturel non nul et $x \in \mathbb{C}$. Calculer :

1. $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} 1$
2. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 1$
3. $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$
4. $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}$
5. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j+1}$
6. $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$
7. $\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} ij$
8. $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)$
9. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$
10. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$
11. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$

Exercice 18 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} 2^j$.

1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Démontrer que $S_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$.
3. En déduire que : $$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$
4. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.

Systèmes linéaires

Exercice 19 ($\star$ Cal)**.** Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + 3y - z &= -1 \\ 2x + 5y + z &= 0 \\ 3x + 2z &= 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -y - z &= 1 \\ 4x + 3y + 11z &= -2 \\ 2x - y + 4z &= 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + y &= 2 \\ x + 2y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + y - 5z &= 3 \\ 3x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y - 7z &= 2 \\ 2x - 3y + 8z &= 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x + 4y + z &= 5 \\ 4x + 2y + 3z &= 3 \\ 5x + 4y + 3z &= 3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x - y + 2z &= 1 \\ 4z &= 3 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x - y + 3z &= 2 \\ 3x + 2y + 2z &= 3 \\ x + 10y - 6z &= 1 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 2x + 2y - z &= -1 \\ x + 4y + z &= -2 \\ x - 2y - 2z &= 1 \end{cases}$

Exercice 20 ($\star\star$ Cal, Rai)**.** Déterminer les valeurs de a pour lesquels le système suivant : $\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + az &= 2 \\ 2x + ay + 2z &= 3 \end{cases}$

1. a une unique solution
2. n'a aucune solution
3. a une infinité de solutions

Exercice 21 ($\star\star$ Cal, Rai)**.** Soit $m \in \mathbb{R}$, résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x - y + z &= m \\ x + my - z &= 1 \\ x - y - z &= 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - my + m^2z &= 2m \\ mx - m^2y + mz &= 2m \\ mx + y - m^2z &= 1 - m \end{cases}$

Exercice 22 ($\star\star$ Rai, Cal)**.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une même droite contenue dans les trois plans définis par les équations suivantes :

$$(1-a)x-2y+z = 0 \qquad 3x-(1+a)y-2z = 0 \qquad \text{et} \qquad 3x-2y-(1+a)z = 0$$

Exercice 23 ($\star\star$ Rai, Cal)**.** Résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\ & & & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Arithmétique

Exercice 24 ($\star$ Rai)**.** Soit n un nombre impair, montrer que n^2-1 est divisible par 8.

Exercice 25 ($\star$ Cal)**.** Calculer le PGCD de 382 et de 251 de deux méthodes différentes.

Exercice 26 ($\star$ Rai ©)**.** Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, 5 divise $2^{2n+1}+3^{2n+1}$.

Exercice 27 ($\star$ Cal, Rai ©)**.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 211 divise $3^{5n}-2^{5n}$.

Exercice 28 ($\star$ Rai)**.** Soit un entier $n \geqslant 2$. Si 2^n-1 est premier (on dit que c'est un nombre de Mersenne), montrer que nécessairement n est premier.

Exercice 29 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{N}^{*3}$ avec $c \geqslant 2$. Montrer que c^b-1 divise c^a-1 si et seulement si b divise a.

Exercice 30 ($\star\star$ Rec, Rai ©)**.** On suppose par l'absurde qu'il existe qu'un nombre fini N d'entiers premiers de la forme $4n+3$ où $n \in \mathbb{N}$. On les note $(p_1, p_2, \dots, p_N)$. Soit $a = 4\prod_{i=1}^{N} p_i - 1$. Démontrer que a admet nécessairement un diviseur premier de la forme $4n+3$, en déduire une contradiction.

Exercice 31 ($\star$ Rai ©)**.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 3 divise 10^n-1.
2. Soit $n = \sum_{k=0}^{d} a_k 10^k$ avec $a_k \in [\![0\,;9]\!]$ (un nombre décomposé en base 10 on a montré lors de l'exercice 11 du TD1 que c'était possible), montrer que 3 divise $n - \sum_{k=0}^{d} a_k$.
3. En déduire qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3.
4. 564 487 689 231 est-il divisible par 3 ?

Exercice 32 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

1. S'il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv = 1$ montrer que $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$
2. Montrer que si $a > b$ et $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ alors $\mathrm{PGCD}(a-b,b) = 1$.
3. On pose l'hypothèse $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $(a,b) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ implique il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv = 1$». Démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Supposons que $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ et que a divise bc, montrer que a divise c.

Exercice 33 ($\star\star$ Rai ©)**.**

1. Soit p un nombre premier et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que si p divise ab alors p divise a ou p divise b (utiliser la question 4 de l'exercice 32).
2. Soit $k \in [\![1\,;p-1]\!]$, montrer que p divise $\binom{p}{k}$
3. En déduire que p divise $(a+b)^p - a^p - b^p$.

Exercice 34 ($\star\star$ Rec ©)**.** Montrons le théorème de décomposition d'un nombre en facteurs de nombres premier, l'existence a été démontré dans l'exercice 11 du TD1. On suppose qu'il existe un nombre un entier admettant deux décompositions différentes. Prenons le plus petit entier comme cela, noté $n \geqslant 2$: $n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^{s} {q_j}^{\beta_j}$ avec p_i, q_j des nombres premiers vérifiant $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ et $q_1 < q_2 < \ldots < q_s$[1], α_i et β_j des entiers naturels non nuls.

1. Soient p un nombre premier et $(a_1, a_2, \dots, a_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, si p divise $\prod_{i=1}^{r} a_i$, en utilisant la première question de l'exercice 33, démontrer que p divise l'un des a_i.

1. Dire que la décomposition est différente veut dire que soit l'un des p_i est différent de tous les q_j, soit l'un des q_j est différent de tous les p_i ou bien que si $p_i = q_j$ alors $\alpha_i \neq \beta_j$

2. En déduire qu'il existe $j \in [\![1\,; s]\!]$ tel que p_1 divise q_j et conclure.

Exercice 35 ($\star\star$ Rai)**.** 1. Soit P un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $r = \pm\dfrac{p}{q}$ une racine rationnel de P avec p et q premiers entre eux. Démontrer que q divise le coefficient dominant de P et p le coefficient constant.

2. Trouver les racines de $2X^3 - 3X^2 - 3X - 5$.

Exercice 36 ($\star$ Rec, Rai)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A_n = \{k \in [\![1\,; n]\!] \mid \mathrm{PGCD}(k, n) = 1\}$ ainsi que $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de A_n.

1. Calculer A_n et $\varphi(n)$ pour $n \in [\![1\,; 10]\!]$.
2. Calculer $\varphi(p)$ pour p premier.
3. $\star\star\star$ Démontrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ (somme sur tous les diviseurs positifs de n).

Une blague pour finir

Exercice 37 ($\star$ Rai)**.** Développer $(a-x)(b-x)(c-x)\ldots(y-x)(z-x)$.