

Nombres réels

Exercice 1 (* Rai ©). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n est $E(\log_{10}(n)) + 1$.

Exercice 2 (§** Rai, Rec ©). Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application non nulle définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + x') = f(x) + f(x') \quad \text{et} \quad f(xx') = f(x)f(x')$$

1. Montrer que $f(1) = 1$, puis $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{N}$, puis $x \in \mathbb{Z}$, puis $x \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ puis que f est croissante.
3. Montrer que $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de suites de rationnels convergeant vers x .

Exercice 3 (* Rai ©). Montrer que la fonction $x \mapsto E(x)$ est croissante sur \mathbb{R} . Montrer que $x \mapsto x - E(x)$ est 1-périodique sur \mathbb{R} et tracer sa courbe.

Exercice 4 (* Rai, Cal). Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$

Exercice 5 (* Rai, Cal). On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

1. Montrer que $h: x \mapsto \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique sur \mathbb{R} .
2. Démontrer l'égalité souhaitée.

Exercice 6 (** Rai, Rec ©). Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} .

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Exercice 7 (** Rai, Rec). Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} . On pose $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 8 (* Rai). Pour chacun des ensembles suivants, étudier l'existence d'un maximum, d'un minimum, d'une borne supérieure, d'une borne inférieure :

1. $A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$
2. $B = \left\{ \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$
3. $C = \left\{ \frac{nm}{(n+m)^2} \mid (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$
4. $D = \{\sqrt{x} - E(\sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{N}\}$

Exercice 9 (** Rai, Rec ©). Soit $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction croissante et $E = \{x \in [0; 1] \mid f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure.
2. On note $s = \sup(E)$. Montrer que $f(s) = s$.

Exercice 10 (** Rai, Rec). Soit O une partie de \mathbb{R} (pas nécessairement un intervalle). On dit que O est un ouvert de \mathbb{R} si pour tout $x \in O$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta; x + \delta[\subset O$.

1. Montrer que les intervalles \emptyset , $] -\infty; b[$, $] a; +\infty[$, \mathbb{R} et $] a; b[$ sont ouverts (ce qui justifie leur nom d'intervalles ouverts) contrairement à $[0; 1]$.
2. Montrer que si pour tout $i \in I$ (I un ensemble), O_i est un ouvert, alors $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert.
3. Montrer que si pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, O_i est un ouvert de \mathbb{R} , alors $\bigcap_{i=1}^n O_i$ est un ouvert de \mathbb{R} .
4. Est-ce $\bigcap_{n=1}^{+\infty}] -1/n; 1/n[$ est ouvert ?

On dit qu'une partie F de \mathbb{R} est fermé si $\mathbb{R} \setminus F$ est ouverte.

5. Montrer que les intervalles \emptyset , $[a; +\infty[$, $] -\infty; b]$, \mathbb{R} et $[a; b]$, sont fermés (ce qui justifie leur nom d'intervalles fermés) contrairement à $]0; +\infty[$.
6. Soit F un fermé de \mathbb{R} . Montrer que pour toute suite $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ convergente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in F$.

7. Réciproquement, soit $F \subset \mathbb{R}$. si pour tout suite $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ convergente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in F$, montrer alors que F est un fermé de \mathbb{R} .

Exercice 11 (*** Rec). Soit $(I_n)_n$ une suite de segments emboîtés : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [a_n ; b_n]$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ et $a_n < b_n$, $I_n \subset I_{n+1}$.

1. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
2. Si de plus, $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, montrer que l'intersection est un singleton.

Suites

Exercice 12 (* Rai ©). 1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique de raison r . Montrer que :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison q . Montrer que :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$$

3. ** Les réciproques des questions 1 et 2 sont-elles Vraies ou fausses ?

Exercice 13 (** Rai, Rec ©). Soit $(u_n)_n$ une suite d'entiers convergente. Montrer qu'elle est stationnaire et en déduire que sa limite est nécessairement entière.

Exercice 14 (* Rai, Cal). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \mid u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 3v_n + 2u_n$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .
2. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 15 (* Cou, Cal). Déterminer le terme général des suites définies par :

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

2. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 16 (* Cal). Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ Étudier la convergence des suites définies par :

1. $\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
2. $\frac{n^3 + 5n}{4n^3 - \cos(n) + \frac{2}{n^2}}$
3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
4. $(\ln n)^{\frac{1}{n}}$
5. $\frac{[nx]}{n}$
6. $\frac{[na]}{a}$
7. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
8. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
9. $\sin(n^3) \left(\frac{e^{i3}}{2}\right)^n$

Exercice 17 (* Cal). Prouver que les suites ci-dessous sont adjacentes et étudier leurs natures :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$$

Exercice 18 (** Rai). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, convergant vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

1. Montrer que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (théorème des séries alternées qui sera au programme de PC/PSI).

Exercice 19 (* Rai). On note $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente¹.

Exercice 20 (* Cal). Étude des suites définies par :

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + u_n^2$.
2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$.

1. On peut montrer que sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$ mais c'est une autre histoire.

- $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.
- $u_1 = 2024$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}$.
- $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$.

Exercice 21 (** Rai, Rec ©). On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n(1 + x_n)}{1 + 2x_n}$.

- Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $0 < x_n < 1$.
- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 22 (** Cal, Rai ©). 1. Rappeler les formules de trigonométrie donnant $2 \cos a \cos b$ et $\cos 2a$.

- En déduire que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 23 (** Rai). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

- Étudier la suite $(z_n)_n$ dans le cas où $z_0 \in \mathbb{R}$.
- Représenter graphiquement z_n et z_{n+1} .
- Pour $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, étudier la convergence de $(z_n)_n$.

Exercice 24 (* Cal). Classer par ordre de négligeabilité :

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln(n)}{n}, \frac{\ln(n)}{n^2}, \frac{1}{n \ln(n)}$$

Exercice 25 (* Cal). Déterminer un équivalent simple des suites définis par :

- $(1 + \frac{2}{n})(n - \ln(n))^2$
- $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
- $\frac{2 \ln(n) - n}{3n + \sqrt{n}}$
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
- $\frac{n^2 + \cos(n)}{2^n + \sin(n^2)}$
- $\ln(n+1)$

Exercice 26 (** Rai, Rec ©). 1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution. On la note x_n .

- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire le comportement de la suite $(x_n)_n$ en $+\infty$.
- Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- Montrer que $\frac{1}{n} - x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$.
- En déduire $x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Exercice 27 (♠** Rai, Rec ©). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Montrer que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (suite harmonique) est croissante.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
- En déduire que $H_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.
- Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

- Montrer que ces suites sont adjacentes.
- En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$. La constante γ s'appelle la constante d'Euler.
- Montrer que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 28 (** Rai ©). Soit $(u_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{N} injective (pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_m$ implique $n = m$). Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

Exercice 29 (♠** Rai, Rec ©). Soit u une suite réelle et soit v la suite suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$$

- Montrer que si u est bornée alors v est bornée. Que pensez-vous de la réciproque ?
- (YT) Montrer que si u converge alors v converge vers la même limite (c'est le théorème de Cesàro). Que pensez-vous de la réciproque ?
- Montrer que si u est croissante alors v est croissante.

Exercice 30 (*** Rai, Rec ©). Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup\{u_k \mid k \geq n\}$, montrer que v_n est bien définie.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n \geq N$ tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Montrer que dans ces conditions, il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers ℓ .
4. Conclure que pour toute suite réelle bornée $(u_n)_n$, il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge.
5. Soit $(z_n)_n$ une suite complexe bornée, montrer qu'il existe une suite extraite de $(z_n)_n$ qui converge.

Ceci est une réciproque partielle de toute suite convergente est bornée. Ce résultat, hors programme de PCSI/PSI/PC, s'appelle le théorème de Bolzano-Weierstrass.