



Dans ce chapitre, après avoir vu la définition et les premières propriétés des polynômes, nous allons nous intéresser à l'arithmétique des polynômes, ainsi, il serait bon d'avoir travaillé la partie arithmétique dans \mathbb{Z} , ce qui permettra, par analogie, une meilleure appropriation des résultats sur les polynômes.

Table des matières

1 Polynôme et premières propriétés	2
1.1 Définition d'un polynôme, degré et opérations	2
1.2 Fonctions polynomiales et racines	3
1.3 Polynôme dérivé	4
2 Arithmétique des polynômes	4
2.1 Divisibilité	4
2.2 Division euclidienne	4
2.3 Racines et divisibilité	5
2.4 Polynômes irréductibles et factorisation d'un polynôme	5
3 Décomposition en éléments simples	7
4 Construction des polynômes (non exigible)	8

1 Polynôme et premières propriétés

1.1 Définition d'un polynôme, degré et opérations



Définition d'un polynôme

Un **polynôme** à coefficients dans \mathbb{K} est un objet de la forme $\sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X^1 + \dots + a_n X^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{K}$. On appelle X l'**indéterminée**. Par convention $X^0 = 1$. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes.

Remarques 1. • L'indéterminée X n'est pas *vraiment* définie ici. C'est un objet formel (ce n'est pas un nombre ni une variable ni une fonction) utilisé pour définir les polynômes. De même, le nombre complexe i , qui n'est pas *vraiment* défini, est utilisé pour définir les complexes.

- Le n dépend du polynôme choisi. Par exemple, pour $2 + 3X$: $n = 1$, pour $1 - X^4$: $n = 4$. Malheureusement, comme $2 + 3X = 2 + 3X + 0X^2 + 0X^3$, ce n n'est pas unique, on peut aussi prendre $n' = 3$. On peut toujours prendre $n' > n$ et si besoin poser $a_k = 0$ pour $k > n$.
- Deux polynômes sont égaux si seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X] \quad \forall Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{K}[X] \quad (P = Q \iff \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad a_k = b_k)$$



Définition du degré d'un polynôme, du coefficient dominant, d'un polynôme unitaire

- Si tous les coefficients d'un polynôme sont nuls, on dit que c'est le **polynôme nul**, noté 0.
- Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme non nul et $d = \max\{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid a_k \neq 0\}$ de sorte que $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. L'entier d est appelé **degré** de P et est noté $d^\circ P = d$. On pose, par convention, $d^\circ 0 = -\infty$.
- On appelle **coefficient dominant** de P le coefficient a_d . On dit que P est **unitaire** si $a_d = 1$.
- On dit que P est un **polynôme constant** si $d^\circ P \leq 0$, dans ce cas $P = a_0$.
- Les polynômes λX^n , avec $\lambda \neq 0$, sont appelés **monômes**.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n .

Exemples 1. $d^\circ 3 =$ $d^\circ X + 2 =$ $d^\circ X^n =$ $d^\circ (aX^2 + bX + c) =$



Attention à ne pas confondre degré n et somme dont le dernier terme est X^n

L'écriture $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ n'implique pas $d^\circ P = n$ seulement que $d^\circ P \leq n$. De plus, $a_n \neq 0$ ssi $d^\circ P = n$.



Définition de somme/multiplication par un scalaire/multiplication/composée

Soient $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $\tilde{P} = \sum_{k=0}^p \tilde{a}_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les polynômes suivants :

- $P + \tilde{P} = \sum_{k=0}^p a_k X^k + \sum_{k=0}^p \tilde{a}_k X^k = \sum_{k=0}^p (a_k + \tilde{a}_k) X^k$ et $\lambda P = \lambda \sum_{k=0}^p a_k X^k = \sum_{k=0}^p (\lambda a_k) X^k$
- $PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec pour tout $k \in \llbracket 0; p+q \rrbracket$, $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ autrement dit

$$\sum_{k=0}^p a_k X^k \times \sum_{k=0}^q b_k X^k = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) X^k$$

- On pose, par convention, $P^0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P^n = P \times P \times \dots \times P$.
- $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^p a_k Q^k$

Exemples 2. Si $P = 2X^2 + 3X$, $Q = X^3 - 2X$ et $R = -2X^2 + 2$, calculer $P + Q$, $P + R$ et PQ et $P \circ Q$.

- Remarques 2.**
- Pour définir la somme de deux polynômes, il faut le même nombre de termes dans les deux sommes (quitte à rajouter des zéros manquants).
 - Ce n'est pas le cas, en revanche pour le produit de deux polynômes. De plus, $c_0 = a_0b_0$ tandis que $c_{p+q} = a_p b_q$.
 - $P(X) = P$



Proposition n° 1 : propriétés des opérations sur les polynômes

Si $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ alors :

- | | |
|--|--|
| 1. $P + Q = Q + P$ (commutativité) | 2. $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ (associativité) |
| 3. $0 + P = P$ (0 neutre de l'addition) | 4. $P + (-1) \times P = 0$ (existence de l'opposé) |
| 5. $(\lambda P) \times Q = \lambda(PQ)$ $1 \times P = P$ | 6. $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$ $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$ |
| 7. $PQ = QP$ (commutativité) | 8. $(PQ)R = P(QR)$ (associativité) |
| 9. $P(Q + R) = PQ + PR$ (distributivité) | 10. $(P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$ binôme de Newton |
| 11. $P^n - Q^n = (P - Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$ | |

Exemple 3. Grâce à $(1 + X)^{2n}$, démontrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exemples 4. Si $P = 2X^2 + 3X$, $Q = X^3 - 2X$ et $R = -2X^2 + 2$, que penser du degré de $P + Q$, $P + R$ et PQ ?



Proposition n° 2 : propriétés sur le degré et intégrité

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors :

- | | |
|---|--|
| 1. $d^\circ(P + Q) \leq \max(d^\circ P, d^\circ Q)$ | 2. Si $d^\circ P \neq d^\circ Q$, alors $d^\circ(P + Q) = \max(d^\circ P, d^\circ Q)$ |
| 3. $d^\circ PQ = d^\circ P + d^\circ Q$ | 4. $d^\circ \lambda P = d^\circ P$ si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ |
| 5. Si Q non constant, $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ P \times d^\circ Q$ | 6. Si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$ (intégrité) |



Attention au degré de la somme

En général, le degré de la somme n'est pas égale à la somme des degrés ni au maximum des degrés.

1.2 Fonctions polynomiales et racines



Définition d'une fonction polynomiale

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{cases}$ est la **fonction polynomiale** associée à P .

Remarques 3.

- Formellement, le polynôme P et la fonction polynomiale \tilde{P} sont des objets différents. Cependant, les concours autorisent parfois de confondre les deux notions.

- Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\widetilde{P + Q}(x) = \tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x)$ et $\widetilde{PQ}(x) = \tilde{P}(x)\tilde{Q}(x)$, $\widetilde{P \circ Q}(x) = \tilde{P}(\tilde{Q}(x))$.



Définition d'une racine d'un polynôme

Soit P un polynôme et $x \in \mathbb{K}$, on dit que x est une racine de P si $P(x) = 0$.

Exemple 5. Est-ce que 1 est racine de $P = X^3 + X^2 - X - 1$?

Remarque 4. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $x_0 \in \mathbb{K}$, alors $P(x_0)$ se calcule par la méthode de Horner avec moins de calculs que la méthode naïve :

$$P(x_0) = a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + x_0(a_3 + \dots)))$$

1.3 Polynôme dérivé



Définition de la dérivée d'un polynôme

On définit le **polynôme dérivé** de $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, par $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} X^j$
 Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $P^{(k)}$ comme le polynôme obtenu en dérivant k fois P : $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = P''$



Proposition n° 3 : propriétés de la dérivée

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. Si P est non constant alors $d^\circ P' = d^\circ P - 1$
2. $d^\circ P' \leq d^\circ P - 1$ et $d^\circ P^{(k)} \leq d^\circ P - k$
3. $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$
4. $(PQ)' = PQ' + P'Q$
5. $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$ (formule de Leibniz)
6. $(X^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ si $k \leq n$ et 0 si $k > n$.



Théorème n° 1 : formule de Taylor pour les polynômes

(admis provisoirement)

Soit $P = \sum_{k=0}^n c_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

En particulier, pour $a = 0$, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $c_k = P^{(k)}(0)/k!$.

2 Arithmétique des polynômes

2.1 Divisibilité



Définition de la divisibilité

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, on dit que B **divise** A (ou que A est un **multiple** de B) s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
 On note $B|A$ lire « B divise A ».

Exemples 6. Est-ce que $X^2 + X - 2$ est un multiple de $X + 2$? Est-ce que $X - 1|X^n - 1$? Est-ce que $X + 1|X^3 + 1$?

2.2 Division euclidienne



Théorème n° 2 de la division euclidienne

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B$.
 L'écriture $A = BQ + R$ s'appelle la **division euclidienne** de A par B , Q est le **quotient** et R le **reste**.

Exemples 7. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 1$ par $X^2 + 3X + 2$ en déduire une primitive de $x \mapsto \frac{x^4 + 1}{x^2 + 3x + 2}$.

Calculer $\int_2^3 \frac{t dt}{t+1}$, $\int_2^3 \frac{t^3}{t+1} dt$ et $\int_2^3 \frac{t^5}{t(t+1)} dt$.



Attention à ne pas confondre la divisibilité et la division euclidienne

La question « B divise A ? » à laquelle on répond par oui ou par non.

La division euclidienne de A par B consiste à **trouver** Q et R tel que $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B$.

**Proposition n° 4 : équivalence entre divisibilité et reste de la division euclidienne**

| Soit B un polynôme non nul. $B|A$ ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

**Comment calculer une division euclidienne ?**

Deux méthodes :

1. Poser la division comme à l'école primaire (fonctionne si $d^\circ A$ est petit)
2. Utiliser les racines de B permet de trouver seulement le reste (en remplaçant X par les racines de B quitte à dériver s'il manque des équations).

Exemples 8. Trouver le reste de la division euclidienne de $X^n + X^{n-1} + 1$ par $X^2 - 3X + 2$ puis par $X^2 - 4X + 4$.

2.3 Racines et divisibilité**Proposition n° 5 : caractérisation des racines avec la divisibilité**

| Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Le nombre a est racine de P si et seulement si $X - a|P$.

**Définition de la multiplicité d'une racine**

| Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul. La **multiplicité** ou **ordre** de $a \in \mathbb{K}$ dans P est le plus grand entier m tel que $(X - a)^m|P$.

Remarques 5. • Formellement l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid (X - a)^k \text{ divise } P\}$ est un ensemble de \mathbb{N} non vide et majorée donc admet bien un plus grand élément que l'on appelle la multiplicité de a dans P .

- Si $m = 0$, alors a n'est pas racine de P
- Si $m = 1$, alors a est une racine simple de P
- Si $m = 2$, alors a est une racine double de P .

**Proposition n° 6 : caractérisation d'une racine de multiplicité m**

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $m \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$. Sont équivalents :

1. a est racine d'ordre m
2. $\exists Q \in \mathbb{K}[X] \mid P = (X - a)^m Q$ et $Q(a) \neq 0$
3. $\forall i \in \llbracket 0; m - 1 \rrbracket P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

Exemple 9. Si $P = X^3 - 7X^2 + 15X - 9$, quelles sont les multiplicités de 1, 2 et 3 dans P ?

**Proposition n° 7 : racine et racine conjugué d'un polynôme réel**

| Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$ une racine de P , alors \bar{z} est aussi racine de P avec même multiplicité que z .

2.4 Polynômes irréductibles et factorisation d'un polynôme**Définition d'un polynôme scindé, scindé à racines simples**

| On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** dans $\mathbb{K}[X]$ s'il s'écrit comme le produit de polynômes de degré 1.
De plus, s'il est scindé et que toutes ses racines sont simples, on dit qu'il est **scindé à racines simples**.

Exemple 10. $X^2 + 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 6. Soit P un polynôme et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\lambda P|P$ et $\lambda|P$. On dit que λP et λ sont des **diviseurs triviaux**.



Définition d'un polynôme irréductible

| Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est dit **irréductible** si ses seuls diviseurs sont λP et λ pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

- Exemples 11.**
1. $X^2 - 3X + 2$ n'est pas irréductible.
 2. Les polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$ sont irréductibles.
 3. Les polynômes de degré 2 de $\mathbb{R}[X]$ dont le discriminant est strictement négatif sont irréductibles.



Théorème n° 3 de d'Alembert-Gauss (théorème fondamental de l'algèbre)

(admis)

| Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, alors P admet au moins une racine complexe.

Exemple 12. Donner le degré, le coefficient dominant, les racines et leur multiplicités de $P = 3(X - 1)^4(X - 2)^2$.



Théorème n° 4 : factorisation d'un polynôme à coefficients réels ou complexes

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non constant, alors il est scindé : il s'écrit sous la forme
$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - z_i)^{m_i}$$
 Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près : λ est le coefficient dominant, les $z_i \in \mathbb{C}$ sont les racines (deux à deux distinctes) de multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$.
2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est non constant, alors P s'écrit sous la forme
$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^s Q_i^{n_i}$$
 Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près : λ est le coefficient dominant, les $x_i \in \mathbb{R}$ sont les racines (deux à deux distinctes) de multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$, Q_i des polynômes unitaires de degré 2 à discriminant strictement négatifs et $n_i \in \mathbb{N}^*$.

- Remarques 7.**
- Un polynôme à coefficients complexes de degré n a donc toujours exactement n racines **complexes comptées avec multiplicité** contrairement au nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients réels. Les réels sont plus complexes que les complexes...
 - Un polynôme $B \in \mathbb{C}[X]$ non nul divise A ssi toute racine de B est racine de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B .

Exemple 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.



Proposition n° 8 : irréductibilité des polynômes de $\mathbb{K}[X]$

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement ceux de degré 1.
2. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement ceux de degré 1 et ceux de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Exemple 14. Combien $P = (X^2 + 1)(X^2 - 6X + 9)$ admet-il de racines réelles? complexes?



Proposition n° 9 : racines comptées avec multiplicité

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, x_1, x_2, \dots, x_r des racines (2 à 2 distinctes) de P de multiplicités m_1, m_2, \dots, m_r .

1. $\prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i} | P$
2. $\sum_{i=1}^r m_i \leq d^\circ P$.
3. Si $P \in \mathbb{K}_n[X] \setminus \{0\}$, P admet au plus n racines.
4. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ a au moins $n + 1$ racines, alors $P = 0$.
5. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$, si P et Q coïncident en $n + 1$ points, alors $P = Q$.

Exemple 15. Si $P = \lambda(X - x_1)(X - x_2)$, $Q = \mu(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, quels sont les coefficients de P ? de Q ?



Proposition n° 10 : relations coefficients-racines

Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ un polynôme de degré n scindé : $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k)$, alors :

1. $\lambda = a_n$
2. $\sum_{k=1}^n x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
3. $\prod_{k=1}^n x_k = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$

Remarque 8. Dans cette proposition, on ne suppose pas que les racines sont simples, si une racine est de multiplicité 3, il y aura trois des x_k qui seront égaux.

- Exemples 16.**
1. Soit un entier $n \geq 2$. Quelle est la somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité?
 2. Factoriser $X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1$.
 3. Factoriser $2X^3 - 26X^2 + 46X - 22$ (commencer par chercher une racine évidente et sa multiplicité).

3 Décomposition en éléments simples

Soit A et B deux polynômes avec B non nul, on dit que la fonction $x \mapsto A(x)/B(x)$ est une **fonction rationnelle** définie sur $\mathbb{C} \setminus E$ où E est l'ensemble des racines de B . Si x est racine de B , on dit que x est un **pôle** de $x \mapsto A(x)/B(x)$ et n'est bien sûr pas dans l'ensemble de définition de $x \mapsto A(x)/B(x)$.



Théorème n° 5 : décomposition en éléments simples d'une fraction à pôles simples *(admis)*

Soit $(R, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $d^\circ R < d^\circ B$ et B scindé à racines simples, de racines b_1, b_2, \dots, b_n . Il existe un unique $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que : $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{b_1, \dots, b_n\} \quad \frac{R(x)}{B(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x - b_i}$.



Comment effectuer la décomposition en éléments simples ?

1. Effectuer la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$, avec $d^\circ R < d^\circ B$.
2. Trouver les racines de B (et vérifier qu'il est bien scindé à racines simples) notées b_1, b_2, \dots, b_n .
3. Si x n'est pas une racine de B , alors $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$
4. Écrire $\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x - b_k}$
5. Multiplier par $x - b_i$ et remplacer x par b_i , on trouve ainsi la valeur de α_i .
6. Conclure que $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x - b_k}$.

Exemple 17. Décomposer en éléments simples $x \mapsto \frac{x^5 + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$. En déduire une primitive.



Péril imminent à ne pas oublier la division euclidienne

Si $d^\circ A \geq d^\circ B$, il faut faire la division euclidienne : c'est $\frac{R(x)}{B(x)}$ que l'on écrit comme $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x - b_i}$ et non $\frac{A(x)}{B(x)}$.



Attention il faut que le polynôme soit scindé à racines simples pour appliquer le théorème

S'il y a une racine double cela ne fonctionne pas. Par exemple, si $B = (X - 1)(X - 1)$, vous ne pouvez pas trouver α_1 et α_2 tels que $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{\alpha_1}{x - 1} + \frac{\alpha_2}{x - 1}$. De même si B n'est pas scindé. Dans ce cas, il faudra que la forme de la décomposition en éléments simples vous soit donnée car elle n'est pas au programme.

4 Construction des polynômes (non exigible)

Dans cette partie, hors programme, nous allons donner une « vraie » définition des polynômes. En particulier, nous répondrons à la question suivante : mais qui est ce mystérieux X ? En effet, on l'a dit, X n'est ni un nombre, ni une variable ni une fonction.



Définition des polynômes

On appelle **polynôme** à coefficients dans \mathbb{K} toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $a_n = 0$.

Remarque 9. En tant que suites, deux polynômes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont égaux ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.



Définition des opérations sur les polynômes

Soit $P = (a_n)_n$, $Q = (b_n)_n$ deux polynômes $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $\lambda P = (\lambda a_n)_n$, $P + Q = (a_n + b_n)_n$ et $PQ = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_n$.

On vérifie alors que λP , $P + Q$ et PQ sont bien des polynômes, *i.e.* des suites nulles à partir d'un certain rang.

Exemples 18. Si $P = (1, 2, 3, 0, 0, \dots)$, plus rigoureusement, $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et pour tout entier $n \geq 3$, $a_n = 0$, $Q = (3, 2, 1, 2, 0, 0, \dots)$, $R = (1, 0, 0, \dots)$, $S = (0, 1, 0, 0, \dots)$ et $\lambda = 2$ alors

- $\lambda P = (2, 4, 6, 0, 0, \dots)$
- $P + Q = (4, 4, 4, 2, 0, 0, \dots)$
- $PQ = (3, 8, 14, 10, 7, 6, 0, 0, 0, \dots)$
- $R^2 = R \times R = (1, 0, 0, \dots)$
- $RP = P$
- $S^2 = S \times S = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$
- $S^3 = S^2 \times S = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$



Proposition n° 11 : propriétés algébriques des polynômes

L'addition est commutative, associative, tout polynôme admet un polynôme opposé.

La multiplication est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

Le polynôme R est l'élément neutre pour la multiplication : pour tout polynôme P , $PR = P$.

Remarque 10. On pose $X = S = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $1 = R = (\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout polynôme P , on pose $P^0 = R = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P^n = P \times P \times \dots \times P$.



Théorème n° 6 : décomposition d'un polynôme en fonction des puissances de X

Avec les notations précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k = (\delta_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit un polynôme $P = (a_n)_n$, une suite nulle à partir du rang N , alors

$$P = \sum_{n=0}^N a_n X^n.$$

Remarques 11. • Ainsi, ici, l'identité $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n$ n'est pas issue de la définition même d'un polynôme mais elle provient d'un théorème.

- Dès qu'on a posé $X = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$, on décide de nommer $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} . La notation X est donc une lettre, muette, pour désigner un polynôme particulier. Le X n'est donc ni une variable, ni un nombre réel, mais une certaine suite. En particulier, on aurait aussi pu poser $Y = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et dans ce cas $\mathbb{K}[Y]$ désignerait l'ensemble des polynômes.
- Ceci est un procédé théorique de construction pour justifier l'existence et les notations des polynômes. Dans la pratique, on préfère oublier que ce sont des suites nulles à partir d'un certain rang et utiliser le X comme un objet mystère en feignant d'ignorer sa vraie nature.
- Cela est très similaire à la construction de \mathbb{C} , on construit i comme un couple de réels et on feint d'ignorer sa vraie nature et on se réduit à l'utiliser comme un élément dans le carré vaut -1 .