Chapitre 8

Calcul matriciel

Table des matières

Dans tout ce chapitre, n, p, q et r sont des entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour deux entiers i et j, on note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Le nombre $\delta_{i,j}$ est appelé le **symbole de Kronecker**. Remarquons que $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$.

1 Définition des matrices et opérations

Définition d'une matrice

On appelle **matrice** de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,j} & \dots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

On note $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ (ou $M = (m_{i,j})_{i,j}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille). Le coefficient à la i-ième ligne et la j-ième colonne est $m_{i,j}$. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $p = n$, on dit que $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une **matrice carrée**. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à la place de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2 & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Remarque 1.
- On note $0_{n,p}$ la matrice de taille (n, p) dont les coefficients sont tous nuls, appelée **matrice nulle**.
- La matrice $I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée **matrice identité** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $p = 1$ et $M \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}$. On dit que M est une **matrice colonne**.
- Si $n = 1$ et $M \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$, alors $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,p} \end{pmatrix}$. On dit que M est une **matrice ligne**.
- Si $n = p = 1$ et $M \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$, alors $M = (m_{1,1})$, on assimile donc M à un nombre et on note $M = m_{1,1}$.
- Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ alors $A = B$ ssi pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; p]\!]$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Définition de la somme de deux matrices

On définit une addition entre $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Exemple 2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A + B =$

Remarque 2. On n'additionne seulement deux matrices de même taille pour obtenir une nouvelle matrice de même taille.

Proposition n° 1 : propriétés de l'addition de deux matrices

Soient $(A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$.

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité)
2. $A + B = B + A$ (commutativité)
3. $A + 0_{n,p} = A$ ($0_{n,p}$ est le neutre de l'addition)
4. $A + (-a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = 0_{n,p}$ (existence de l'opposé)

Définition du produit d'une matrice par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 3. Calculer λA si $\lambda = 3$ et $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition n° 2 : propriétés du produit d'une matrice par un scalaire

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

1. $1A = A$ et $0A = 0_{n,p}$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Définition du produit de deux matrices

Si $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit $C = A \times B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;q]\!] \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

Remarque 3. Il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. pour faire le produit de $A \times B$. Le produit $A \times B$ peut être possible sans que le produit $B \times A$ le soit.

Exemple 4. Dans les cas suivants, indiquez si le produit AB est possible et si oui effectuez-le (idem pour BA).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 5 & -28 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mathrm{i} & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Péril imminent : le produit matriciel ***«hélas l'anneau (des matrices) est traître»***

- Le produit matriciel a une condition sur les tailles pour être défini (condition à connaître)
- Le produit matriciel n'est pas un produit terme à terme (formule à connaître)
- Les matrices AB et BA peuvent être différentes (non commutativité)
- Si $AB = 0_{n,q}$, on ne peut rien en déduire (non intégrité)
- Même si A est non nul, $AB = AB'$ n'implique pas $B = B'$ (pas de simplification d'égalité)

Proposition n° 3 : propriétés de la multiplication des matrices

1. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $A \times I_p = A$ $\quad A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$ $\quad I_n \times A = A$ $\quad 0_{q,n}A = 0_{q,p}$
2. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors $(AB)C = A(BC)$ (associativité du produit matriciel)
3. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. Si $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité)
5. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$, $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité)

Définition de la transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **transposée** de A la matrice $A^\top = (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A^\top =$

Remarque 4. Les lignes de A forment donc les colonnes de $A^\top$ et vice versa.

Proposition n° 4 : propriétés de la transposée

Soient $(A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $(A^\top)^\top = A$, $(A + \lambda B)^\top = A^\top + \lambda B^\top$, $(AC)^\top = C^\top A^\top$.

2 Matrices élémentaires, opérations élémentaires et systèmes linéaires

2.1 Matrices élémentaires et opérations élémentaires

Définition d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $(a,b) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, on appelle $E_{a,b} = (\delta_{i,a}\delta_{j,b})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **matrice élémentaire** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 5. Les coefficients de $E_{a,b}$ sont nuls sauf celui à la a-ième ligne et b-ième colonne qui vaut 1.

Exemple 6. Écrire toutes les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

Proposition n° 5 : décomposition d'une matrice en combinaison linéaire de matrices élémentaires

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors,
$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}E_{i,j}$$
où $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition n° 6 : produit de deux matrices élémentaires

Pour $(E_{a,b}, E_{c,d}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices élémentaires,
$$E_{a,b}E_{c,d} = \delta_{b,c}E_{a,d} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K}).$$

Remarque 6. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $E_{a,b} \in \mathscr{M}_{p}(\mathbb{K})$, $ME_{a,b}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la b-ième qui vaut la a-ième colonne de M. Si $E_{a,b} \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})$, $E_{a,b}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la a-ième qui vaut la b-ième ligne de M.

Définition des matrices d'opérations élémentaires

1. Si $a \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle $D_a(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{a,a}$ **matrice de dilatation**.
2. Si $(a,b) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $a \neq b$, on appelle $P_{a,b} = I_n - E_{a,a} - E_{b,b} + E_{a,b} + E_{b,a}$ **matrice de transposition**.
3. Si $(a,b) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $a \neq b$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle $T_{a,b}(\lambda) = I_n + \lambda E_{a,b}$ **matrice de transvection**.

Remarque 7. Les tailles de $E_{a,b}$, $D_a(\lambda)$, $P_{a,b}$ et $T_{i,j}(\lambda)$ ne sont pas indiquées dans la notation de ces matrices. Le contexte permet de lever toute ambiguïté.

Exemple 7. Calculer les produits $D_2(3)A$, $AD_2(3)$, $P_{1,2}A$, $AP_{1,2}$, $T_{1,2}(10)A$, $AT_{1,2}(10)$ avec et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

Proposition n° 7 : effet de la multiplication par une matrice d'opérations élémentaires

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $D_a(\lambda)A$ est la matrice A à laquelle on a multiplié la a-ième ligne par λ.
2. $P_{a,b}A$ est la matrice A à laquelle on a échangé la a-ième ligne avec la b-ième ligne.
3. $T_{a,b}(\lambda)A$ est la matrice A à laquelle on a ajouté λ fois la b-ième ligne à la a-ième ligne.
4. $AD_a(\lambda)$ est la matrice A à laquelle on a multiplié la a-ième colonne par λ.
5. $AP_{a,b}$ est la matrice A à laquelle on a échangé la a-ième colonne avec la b-ième colonne.
6. $AT_{a,b}(\lambda)$ est la matrice A à laquelle on a ajouté λ fois la a-ième colonne à la b-ième colonne.

2.2 Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire

Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on dit que le système suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p & = & y_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = & y_n \end{cases}$$

est un **système linéaire** de n équations à p inconnues $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de coefficients $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de second membre $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. On dit que $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est solution du système s'il vérifie les n équations du système. Résoudre un tel système revient à déterminer toutes les solutions. Un système est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. On dit que le système est **homogène** si le second membre est nul.

Remarque 8. Résoudre un système linéaire revient à trouver tous les $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = Y$.

Proposition n° 8 : structure des solutions

Soit un système linéaire $AX = Y$ compatible dont X_P est une solution particulière. Les solutions de ce système sont exactement de la forme $X_P + X_H$ où X_H est solution du système homogène $AX = 0_{p,1}$.

Comment résoudre un système linéaire ? (pivot de Gauss)

On fait des opérations sur les lignes de façon à «échelonner» le système : à chaque ligne, la première inconnue rencontrée doit être plus à droite qu'à la ligne précédente. Une ligne «$0 = 0$» se supprime, une ligne «$0 = 1$» montre que le système est incompatible. Une fois le système échelonné, la première inconnue de chaque ligne est appelée inconnue principale et est exprimé en fonction des inconnues non principales (appelées inconnues secondaires).

Exemple 8. Résoudre $\begin{cases} 2x + 3y + 5z + 2t & = & 3 \\ 4x + 6y + z + 2t & = & 2 \end{cases}$.

3 Matrices carrées

On note 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition n° 9 : des opérations des matrices carrées

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors, $AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad A \times I_n = I_n \times A = A$, $\quad A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$, $\quad A^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition de la puissance d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$. Par convention, $A^0 = I_n$.

Exemple 9. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0_2$. Si $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = 0_2$.

Définition d'un diviseur de zéro, d'une matrice nilpotente

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un **diviseur de zéro** si $A \neq 0_n$ et s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = 0_n$.
Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0_n$, on dit que N est une matrice **nilpotente**.

Définition de la diagonale d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n})$ est appelée **diagonale** de A.

3.1 Cas particuliers de matrices carrées

Définition des matrices scalaires/diagonales/triangulaires supérieures/triangulaires inférieures

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λI_n est une **matrice scalaire**.
2. On dit que $D = (d_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonale** si ses termes en dehors de la diagonale sont nuls : $\forall (i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2 \quad i \neq j \implies d_{i,j} = 0$
3. On dit que $T = (t_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si ses coefficients en dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls : $\forall (i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2 \quad i > j \text{ (resp. } i < j) \implies t_{i,j} = 0$

Exemple 10. 0_n, I_n, $2I_n$ sont des matrices scalaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont triangulaires supérieures. Les matrices scalaires commutent avec toutes les autres matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ce sont mêmes les seules matrices à commuter avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

Proposition n° 10 : propriétés des produits de matrices diagonales et triangulaires

1. Si D et D' sont deux matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $D'' = DD'$ est diagonale et $d''_{i,i} = d_{i,i} \times d'_{i,i}$.
2. Si T et T' deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $T'' = TT'$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure). De plus, $t''_{i,i} = t_{i,i} \times t'_{i,i}$

Exemple 11. Si D est une matrice diagonale de diagonale $(d_1, \ldots, d_n)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, D^k est une matrice diagonale de diagonale $({d_1}^k, \ldots, {d_n}^k)$.

Définition des matrices symétriques et antisymétriques

1. On dit que $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** si $S = S^\top$ *i.e.* pour tout $(i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2$ si $s_{i,j} = s_{j,i}$.
2. On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** si $A = -A^\top$ *i.e.* pour tout $(i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 12. $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ est symétrique, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 9. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont forcément nuls.

Exemple 13. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, développer $(A+B)^2$ ainsi que $(A-B)(A+B)$

Proposition n° 11 : formule du binôme de Newton et factorisation de $A^p - B^p$

Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $AB = BA$ alors $\quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \quad$ et $\quad A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$

Péril imminent la condition « A et B commutent » n'est pas décorative

Appliquez ces formules sans vérifier que A et B commutent et c'est la chute !

Utilisation du binôme de Newton pour calculer les puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

3.2 Inverse d'une matrice carrée

Définition d'une matrice inversible et de l'inverse d'une matrice carrée

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. Le B est alors unique et on dit que B est l'**inverse** de A et on le note A^{-1}. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 14.
- I_n est inversible et ${I_n}^{-1} = I_n$, 0_n n'est pas inversible.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A = I_n$, montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède une ligne (ou une colonne) remplie de 0, alors A n'est pas inversible.

Proposition n° 12 : propriétés de l'inverse

Soient $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$
1. $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $\lambda A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
3. $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
4. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Attention la somme de matrices inversibles n'est pas forcément inversible

I_n et $-I_n$ sont inversibles mais pas leur somme.

Proposition n° 13 : inverse d'une matrice de taille $(2, 2)$

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Théorème n° 1 d'inversibilité d'une matrice par système linéaire

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système linéaire $Y = AX$ admet une et unique solution qui est $X = BY$. Dans ce cas, $A^{-1} = B$.

Exemples 15. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse. Étudier l'inversibilité de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition n° 14 : inversibilité d'une matrice diagonale

Soit $D = (d_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Alors $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $d_{i,i} \neq 0$. Dans ce cas, D^{-1} est une matrice diagonale de diagonale $({d_{1,1}}^{-1}, {d_{2,2}}^{-1}, \ldots, {d_{n,n}}^{-1})$.

Proposition n° 15 : inversibilité des matrices d'opérations élémentaires et opérations élémentaires

Soit $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, les matrices $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont inversibles.
Les opérations élémentaires sur les matrices conservent l'inversibilité.

Théorème n° 2 d'inversibilité d'une matrice par opérations sur les lignes

Si en effectuant des opérations simultanément sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et de I_n, on transforme A en I_n, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et on a transformé I_n en A^{-1}. Sinon, on obtiendra une ligne remplie de 0 et A n'est pas inversible.

Exemple 16. Étudier à nouveau l'inversibilité des matrices de l'exemple 15.

Proposition n° 16 : inversibilité d'une matrice triangulaire

Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $t_{i,i} \neq 0$.
Alors, T^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure), dont la diagonale est $({t_{1,1}}^{-1}, \ldots, {t_{n,n}}^{-1})$.

Exemple 17. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4 Méthodes

Comment calculer les puissances d'une matrice ?

1. Si N est nilpotente, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$, alors pour tout entier $k \geqslant p$, $N^k = N^p N^{k-p} = 0_n$.
2. Si D est diagonale, alors D^k est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de D mis à la puissance k.
3. Décomposer la matrice en $A + B$ si A et B commutent et que vous savez calculer A^k et B^k pour tout k, pour appliquer la formule du binôme. Souvent, A est une matrice scalaire et B une matrice nilpotente.
4. Calculer les premières puissances pour conjecturer une formule puis la montrer par récurrence.
5. Si la matrice $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible, alors $M^p = PD^pP^{-1}$

Comment calculer l'inverse d'une matrice ?

1. Si la matrice est de taille $(2, 2)$ connaître et utiliser seulement la formule pour les matrices de taille $(2, 2)$.
2. Imaginer ce que pourrait être l'inverse de A et le multiplier par A pour voir si cela vaut I_n.
3. Effectuer des opérations simultanément sur les lignes de A et I_n de façon à transformer A en I_n (en échelonnant la matrice colonne par colonne). Si cela est possible, alors A est inversible et en transformant A en I_n, on a transformé I_n en A^{-1}. Si en échelonnant, on obtient une ligne remplie de 0, A n'est pas inversible.
4. Résoudre le système $AX = Y$ pour Y une matrice colonne quelconque sous la forme $X = BY$.
5. Si on a une relation entre les puissances de A factoriser par A en laissant le terme en I_n de côté.