Chapitre 12

Espaces vectoriels

Objectifs :
Définir la notion d'espaces vectoriels. À la façon de monsieur Jourdain, vous utilisiez déjà des exemples espaces vectoriels sans le savoir. L'étude de la notion d'espace vectoriel permet d'étudier tous ces exemples en même temps.
Prérequis :

- Ensembles et applications
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes

Table des matières

1 Définition des espaces vectoriels **2**

2 Sous-espaces vectoriels **3**

3 Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré **4**

4 Somme de deux sous-espaces vectoriels et supplémentaires **4**

5 Propriétés des familles finies d'un espace vectoriel **5**
5.1 Famille libre 5
5.2 Famille génératrice 6
5.3 Bases 6

6 Fiche méthode **7**

7 Carte mentale pour étudier la liberté d'une famille **8**

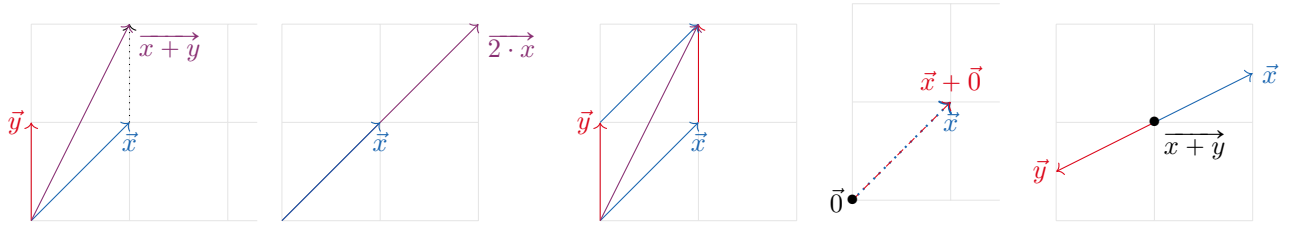
8 Complément hors programme : les familles libres et génératrices infinies **9**

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier non nul.

1 Définition des espaces vectoriels

Avant de donner la définition d'un espace vectoriel, étudions quelques exemples :

1. Soient deux n-uplets de $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, on les somme : $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. On multiplie aussi x par $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$



(a) $(1,1)+(0,1)=(1,2)$ (b) $2\cdot(1,1)=(2,2)$ (c) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (d) $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ (e) Il existe $\vec{y}$ tel que $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$

FIGURE 1 – Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ représentés avec des flèches. Et quelques propriétés sur les vecteurs.

2. De même, étant donnés deux polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on obtient $P + Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda P \in \mathbb{K}[X]$.
3. Soient deux fonctions $(f, g) \in (\mathbb{R}^I)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f+g$: $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I$ et λf : $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I$
4. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $A + B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 1. Dans la suite, la notion d'espace vectoriel généralise ces exemples. Ainsi, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ etc. seront des espaces vectoriels, les éléments de ces ensembles seront appelés des vecteurs. Contrairement au lycée, nous n'utiliserons pas de flèches au dessus des vecteurs, sauf pour les schémas.

Définition d'un espace vectoriel

On appelle **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** un ensemble E muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ vérifiant :

1. L'**addition** dite **interne** $+ : \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{cases}$ satisfaisant :
   (a) $\forall (x, y) \in E^2 \quad x + y = y + x$ (l'addition de vecteurs est commutative)
   (b) $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (l'addition de vecteurs est associative)
   (c) $\exists 0_E \in E \quad \forall x \in E \quad x + 0_E = x$ (il existe un vecteur nul noté 0_E)
   (d) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x + y = 0_E$ (tout vecteur x admet un vecteur opposé y).
2. La **multiplication** dite **externe** $\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \end{cases}$ satisfaisant :
   (a) $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$ (multiplier un vecteur par 1 ne change pas le vecteur)
   (b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$ (pseudo-associativité)
   (c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (distributivité de $\cdot$ par rapport à $+$)
   (d) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (distributivité de $\cdot$ par rapport $+$)

Les éléments de E sont alors appelés **vecteurs** de E, 0_E est appelé **vecteur nul** de E.

Remarque 2. Voilà une définition particulièrement rebutante. L'important est surtout de comprendre ce que ça veut dire. Que faites-vous avec des vecteurs ? Les additionner ensemble, et les multiplier par un scalaire. Cette définition n'est que la formalisation de cette idée avec tout un tas d'exigences raisonnables, par exemple :

- Le point 1a exige seulement que lorsqu'on ajoute deux vecteurs l'ordre n'intervient pas.
- Le point 1c exige juste qu'il existe un vecteur nul.

Exemples classiques d'espaces vectoriels

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

I. $\mathbb{K}^n$ (i.e. $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel), $\mathbb{C}^n$ est un aussi $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

II. $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{C}[X]$ est un un $\mathbb{R}$-EV).

III. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$)

IV. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$)

V. $\mathbb{K}^{\mathbb{R}} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$)

VI. $E^{\Omega} = \mathscr{F}(\Omega, E)$ (ensemble des fonctions de Ω un ensemble quelconque vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E)

Remarque 3. Les vecteurs peuvent donc être des polynômes, des matrices, des suites, des fonctions etc.

Péril imminent : à l'impossible nul n'est tenu

Si on a deux vecteurs d'un espace vectoriel, on peut les additionner mais pas les multiplier entre eux.

«*Et je vais devoir appliquer cette définition à chaque fois que je dois montrer qu'un machin est un espace vectoriel ?*» Rassurez-vous, vous ne l'utiliserez quasiment jamais. Dans la pratique, on montre que des ensembles sont bien des espaces vectoriels en vérifiant quelque chose de bien plus simple que l'on va voir au plus vite.

À partir de maintenant E désignera toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition n° 1 : premières propriétés d'un espace vectoriel

1. On a unicité du vecteur 0_E au point 1c.
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E) \iff \lambda \cdot x = 0_E$
3. Pour tout x, on a unicité du vecteur y au point 1d, de plus $y = (-1) \cdot x$.

2 Sous-espaces vectoriels

Définition d'un sous-espace vectoriel

Soit $F \subset E$, on dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si : $0_E \in F$, $\quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in F$

Proposition n° 2 : un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors F est lui-même un espace vectoriel.

Exemples 1. Montrer que F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
2. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$
3. E quelconque et $F = \{0_E\}$ et $F' = E$
4. $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}_n[X]$
5. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $F' = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
6. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et F l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$

Exemples 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. La droite passant par les points $(1, 2)$ et $(0, 1)$
2. $\{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Remarque 4. Si F est un SEV de E, et que $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in F^n$, et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F$.

Proposition n° 3 : intersection de sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est alors un sous-espace vectoriel de E.
De même, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de SEVs de E, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un SEV de E.

Exemple 3. On note $F = \{(x, y, y) \text{ tel que } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, puis calculer leur intersection.

Attention l'union de deux SEV de E n'est pas, en général, un SEV de E.
Par exemple, $F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, $F \cup G$ est-il un SEV de $\mathbb{R}^2$?

3 Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré

Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace vectoriel engendré

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on dit que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ est **une combinaison linéaire** de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
- On appelle **espace vectoriel engendré** par $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On note vect $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ cet ensemble :

$$\text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left\{ x \in E \mid \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ où } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Remarques 5.
- vect$(e_1, \dots, e_n)$ a été défini par compréhension et par paramétrage.
- $x \in \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Exemples 4.
- Dans $E = \mathbb{R}^3$, donner plusieurs combinaisons linéaires de $u = (1, 2, 3)$ et $v = (2, 2, 2)$.
- Si $e_1 \neq 0_E$ vect(e_1) est une droite vectorielle de E.
- Si e_1 et e_2 sont non nuls et que e_2 n'est pas colinéaire à e_1, alors vect(e_1, e_2) est un plan vectoriel.
- Pour $E = \mathbb{R}[X]$, déterminer vect$(1, X)$.

Proposition n° 4 : l'espace engendré est un espace vectoriel

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E et $F = \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

1. F est un SEV de E.
2. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $e_i \in F$.
3. F est le plus petit SEV de E (au sens de l'inclusion) à contenir tous les e_i pour $i \in [\![1\,;n]\!]$:
   Si H est un sous-espace vectoriel qui contient tous les e_i, alors vect $(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset H$.

Remarques 6.
- Soit $i \in [\![1\,;p]\!]$, si $e_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$, alors ce vecteur ne sert à rien dans l'espace vectoriel engendré : vect $(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$.
- Pour montrer que F est un SEV de E, il suffit de trouver des $e_i \in E$ tel que $F = \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemples 5.
1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $F = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid y \text{ est deux fois dérivable et } y'' + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

4 Somme de deux sous-espaces vectoriels et supplémentaires

Définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit la **somme** de F et G par :

$$F + G = \{f + g \quad \text{où} \quad f \in F\ g \in G\} = \{y \in E \quad \text{tel que} \quad \exists (f, g) \in F \times G \text{ vérifiant } y = f + g\}$$

De plus, on dit que la somme est **directe** si f et g sont uniques : on note, dans ce cas-là, la somme $F \oplus G$.

$$\text{La somme } F + G \text{ est directe} \iff \forall y \in F + G \quad \exists ! (f, g) \in F \times G \text{ tel que } y = f + g$$

Remarques 7.
- L'ensemble $F+G$ a été défini par compréhension et par paramétrage.
- Pour $x \in E$, on a $x \in F+G$ ssi il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que $x = f+g$.

Exemples 6.
- Pour $E = \mathbb{R}^2$, $F = \text{vect}((1,0))$, $G = \text{vect}((0,1))$. Que vaut $F+G$? La somme est-elle directe ?
- Dans $\mathbb{R}[X]$, on note $F = \text{vect}(1, X^2)$ et $G = \text{vect}(X)$. Que vaut $F+G$? La somme est-elle directe ?

Proposition n° 5 : propriétés de la somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on a les propriétés suivantes :
1. $F+G$ est un SEV de E
2. $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$.
3. $F+G$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) SEV de E à contenir F et G.

Proposition n° 6 : caractérisation de la somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Sont équivalents :
1. $F \oplus G$
2. $F \cap G = \{0_E\}$ (le plus utilisé pour montrer $F \oplus G$)
3. $\forall (f,g) \in F \times G \quad f+g = 0_E \implies f = g = 0_E$

Exemple 7. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en somme directe.

Définition d'un supplémentaire

Soient F et G deux SEV de E. On dit que G est un **supplémentaire** de F si $F \oplus G$ et si $E = F+G$. On note dans ce cas, $E = F \oplus G$. On dit également que F et G sont **supplémentaires** dans E.

Autrement dit : $E = F \oplus G \iff \forall x \in E \quad \exists!(f,g) \in F \times G \quad x = f+g$

Remarque 8. Si $E = F \oplus G$ et $x \in E$, alors il existe un unique couple $(f,g) \in F \times G$ tel que $x = f+g$. On dit que f est la projection de x sur F parallèlement à G. On note $p_F(x) = f$.

L'ensemble des matrices symétriques et celui des antisymétriques sont supplémentaires

Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont supplémentaires

Soient P (resp. I) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $E = P \oplus I$.

5 Propriétés des familles finies d'un espace vectoriel

5.1 Famille libre

Remarque 9. Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de E, si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.

Définition d'une famille libre

Soit $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille finie de E, on dit que la famille $\mathscr{L}$ est **libre**, si il y a une seule façon d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{L}$. Autrement dit si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad \lambda_i = 0 \right)$$

Si $\mathscr{L}$ est libre, on dit aussi que les vecteurs e_1, …, e_n sont **linéairement indépendants**.

Remarque 10. On dit que $\mathscr{F}$ est **liée** si elle n'est pas libre, c'est-à-dire ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. En isolant e_{i_0}, on obtient $e_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} e_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, \dots, e_n)$. Ainsi, une famille $\mathscr{F}$ est liée ssi l'un des vecteurs de $\mathscr{F}$ s'exprime une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$.

Exemples 8.
- Soit $u = (1,2,3)$ et $v = (1,1,1)$ et $w = (1,1,10)$, montrer que (u,v,w), est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
- La famille $(1, \mathrm{i})$ est-elle libre dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-EV ? Et vu comme $\mathbb{C}$-EV ?

Théorème n° 1 : condition nécessaire et suffisante pour être libre
Soit $\mathscr{L} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille libre de E et $x \in E$. Alors $\mathscr{L} \cup (x)$ est libre ssi $x \notin \text{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemple 9. La famille $((1,1,1),(1,0,0),(4,1,1))$ est liée.

Remarques 11.
- Si $0_E \in \mathscr{F}$, où $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est liée.
- Si (u) est une famille de un vecteur de E, alors (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
- Si (u,v) est une famille de deux vecteurs de E, alors, (u,v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

Attention cela ne se généralise pas à plus de deux vecteurs
Si pour tout $i \neq j$, e_i et e_j sont non colinéaires, cela n'implique pas forcément que $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre. En effet, la famille $((1,1,1),(1,0,0),(4,1,1))$ est liée.

Remarque 12. Soit $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille. Alors, $\mathscr{L}$ est libre si et seulement si pour tout $x \in \text{vect}(\mathscr{L})$, il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Exemple 10. Cela permet d'identifier : si $m\vec{a} = \vec{F}$ et $\vec{a} = a_x\vec{x} + a_y\vec{y}$, $\vec{F} = F_x\vec{x} + F_y\vec{y}$, alors $ma_x = F_x$ et $ma_y = F_y$.

Théorème n° 2 : famille de polynômes de degré deux à deux distincts est libre
Si $\mathscr{L}$ est une famille finie de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts, alors $\mathscr{L}$ est libre.

5.2 Famille génératrice

Définition d'une famille génératrice
Une famille finie de vecteurs de E, $\mathscr{G} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est appelée **famille génératrice** de E si

$$E = \text{vect}(\mathscr{G}) = \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

Autrement dit, $\mathscr{G}$ est génératrice ssi $\forall x \in E \quad \exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

Exemple 11.
1. Montrer que $(1, X^2+X, X+1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Est-elle libre ?
2. Montrer que $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?
3. Montrer que $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Est-elle libre ?

Remarque 13. La famille $\mathscr{G}$ est nécessairement génératrice de $\text{vect}(\mathscr{G})$.

5.3 Bases

Définition d'une base
Soit $\mathscr{B}$ une famille finie de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une **base** si $\mathscr{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Ainsi, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E ssi $\forall x \in E \quad \exists!\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

On dit alors que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Attention : il faut une famille finie

Au programme de PCSI/PSI/PC, les familles libres, génératrices et les bases sont toujours des familles finies.

Exemple de bases importantes (à connaître)

1. $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Si $\mathscr{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ telle que pour tout $i \in [\![\, 0\,;n \,]\!]$, $d^\circ P_i = i$, alors $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.
4. $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemples 12.
- Montrer que $((1,1,1),(1,0,0),(0,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (mais n'est pas la base canonique de $\mathbb{R}^3$).
- Donner une base de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Puis vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Proposition n° 7 : concaténation de bases et supplémentaires

soit F et G deux SEV de E de bases respectives $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $\mathscr{B}_G = (g_1, g_2, \dots, g_p)$, alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une base de E.

Définition d'une base adaptée

Soient F et G deux SEV supplémentaires de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On dit que $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ est une **base adaptée** à la décomposition de $E = F \oplus G$.

6 Fiche méthode

Comment montrer que E est un espace vectoriel ?

M1 Montrer que E respecte la définition (rare et long).

M2 Reconnaître un espace vectoriel de référence.

M3 Montrer que E un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel (voir méthode suivante).

Comment montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ?

M1 Montrer que $F \subset E$ $\quad 0_E \in F$ $\quad \forall (a,b) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad a + \lambda b \in F$.

M2 $F = \mathrm{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$ où $e_i \in E$.

M3 F s'écrit comme somme (ou comme intersection) de SEVs de E.

Comment montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre ?

Fixer $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, supposer $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$, montrer que pour tout i, $\lambda_i = 0$ (système à résoudre souvent).

Comment montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice ?

Soit $x \in E$, trouver $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ (système à résoudre, ou analyse-synthèse).

Comment montrer qu'une famille est une base ?

Montrer qu'elle est libre et génératrice.

Comment montrer que F et G sont en somme directe ?

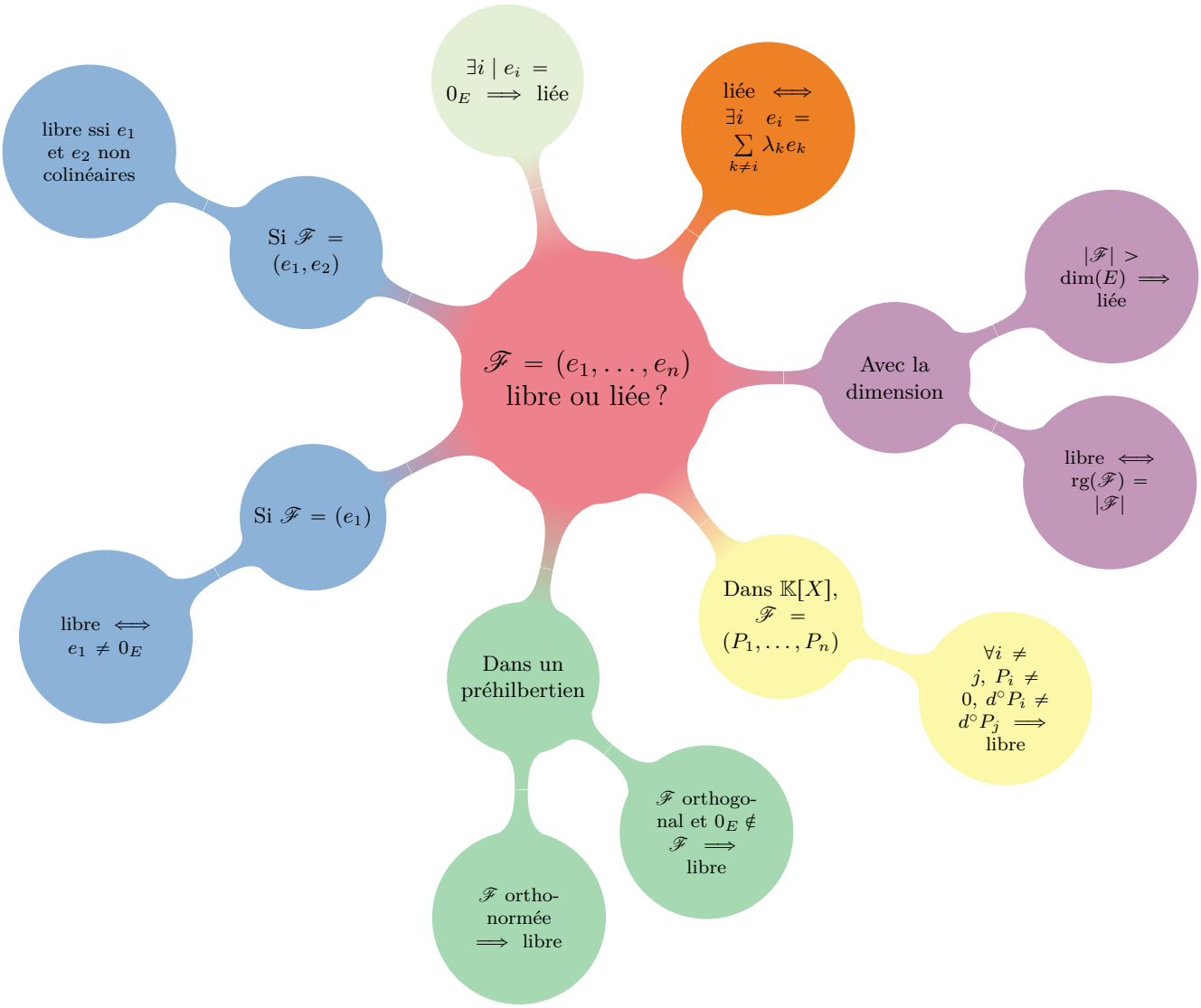
Prendre $x \in F \cap G$, montrer que $x = 0_E$.

Comment montrer que F et G sont supplémentaires ?

M1 Soit $x \in E$, montrer qu'il existe unique $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$ (par analyse-synthèse, par exemple).

M2 Montrer que $F \oplus G$, puis, soit $x \in E$, trouver un couple (f, g) tel que $x = f + g$, $f \in F$ et $g \in G$.

7 Carte mentale pour étudier la liberté d'une famille



8 Complément hors programme : les familles libres et génératrices infinies

Cette partie n'est pas au programme. Vous pouvez la lire et la travailler seulement si vous avez de bons résultats en mathématiques **et** si cela vous intéresse **et** si vous ambitionnez une très bonne école
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans toute cette partie, on va considérer $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs infinie indéexée par I. Par exemple si $I=\mathbb{N}$, on pourra considérer la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $P_n=X^n\in\mathbb{R}[X]$. Le but est de donner un sens à «$(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice» (ou libre). Sachant que les définitions de ce chapitre ne suffisent pas. En effet, on ne peut pas dire que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E ssi pour tout $x\in E$, il existe $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I$ tel que $x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$.
Comme on ne peut pas donner un sens à la somme d'une infinité de vecteurs, il faut donc tout reprendre différemment pour contourner ce problème.

Définition de l'espace vectoriel engendré

Soit $x\in E$, on dit que x est une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ s'il existe $J\subset I$ avec J un ensemble fini et $(\lambda_j)_{j\in J}$ tel que $x=\sum_{j\in J}\lambda_j x_j$. On note $\text{vect}(x_i)_{i\in I}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i\in I}$. Ainsi,

$$\text{vect}(x_i)_{i\in I}=\left\{x\in E\mid \exists J\subset I \text{ avec } J \text{ fini}\quad \exists(\lambda_j)_{j\in J}\in\mathbb{K}^J\qquad x=\sum_{j\in J}\lambda_j x_j\right\}$$

Remarque 14. Sans surprise, $\text{vect}(x_i)_{i\in I}$ est un SEV de E et c'est le plus petit SEV de E à contenir tous les x_i.

Définition d'une famille génératrice

On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si $E=\text{vect}(x_i)_{i\in I}$.

Exemple 13. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Définition d'une famille libre de vecteurs

On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si pour tout $J\subset I$ avec J fini, la famille $(x_j)_{j\in J}$ est libre.

Exemple 14. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{K}[X]$.

Définition d'une base

On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Exemple 15. $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.