Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 ($\star$ Cou, Rai, Rec ©)**.** Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels (on vérifiera si ce sont ou non des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels de référence que l'on précisera).

a) L'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et continues en 0.

b) L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.

c) L'ensemble des fonctions réelles définies sur $[\,1\,;2\,]$ prenant la valeur 1 en 1.

d) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad (u_n) \text{ converge}\}$

e) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad (u_n) \text{ bornée}\}$

f) $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6 = 0\}$

g) L'ensemble des suites réelles arithmétiques

h) L'ensemble des suites réelles géométriques

i) $\{f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R}),\ f(a) = f(b)\}$

j) $\{f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$

k) $\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable } \mid f(1) = f'(1) = 0\}$

l) $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M \text{ est inversible}\}$

m) $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M = M^2\}$

n) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0\}$

o) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 1\}$

p) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$

q) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geqslant 0\}$

r) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y\}$

s) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - 2y = 0\}$

Exercice 2 ($\star$ Rai)**.** 1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels engendrés par une partie finie à déterminer :

(a) Dans $E = \mathbb{R}[X]$: $F = \{aX^3 + bX + c,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

(b) Dans $E = \mathbb{R}^n$: $G = \{(a,\dots,a) \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}\}$

(c) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $H = \{(a-b, a+b, a-3b) \in \mathbb{R}^3,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

(d) Dans $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

(e) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $\quad R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$

2. Déterminer $H \cap R$.

Exercice 3 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriel de E. Montrer que

$$F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E \quad \Longleftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice 4 ($\star\star$ Cou, Rai, Rec ©)**.** Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on s'intéresse à l'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ en en donnant *une famille génératrice.*

Exercice 5 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles finies de vecteurs d'un espace vectoriel E.

1. Comparer $\mathrm{vect}(\mathscr{F} \bigcap \mathscr{G})$ et $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) \bigcap \mathrm{vect}(\mathscr{G})$.
2. Comparer $\mathrm{vect}(\mathscr{F} \bigcup \mathscr{G})$ et $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) + \mathrm{vect}(\mathscr{G})$.

Exercice 6 ($\star\star$ Rec, Rai)**.** Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ on note $F = \{x \mapsto A\cos(\omega x + \varphi), (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et écrire $F = \mathrm{vect}(\mathcal{F})$ pour une certaine famille finie $\mathcal{F}$.

Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 7 ($\star$ Rai ©)**.** On considère les sous-espaces vectoriels $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) + P(2) = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}(X+3)$. Montrer que F et G sont en somme directe.

Exercice 8 ($\star$ Rai, Cal)**.** Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) \in \mathbb{R}^3, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $(1,0,0) \in F + G$ mais n'appartient ni à F, ni à G.
3. F et G sont-ils en somme directe ?

Exercice 9 (⋆ Rai, Cal ©)**.** Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose : $F = \mathrm{vect}((1,0,-1),(1,1,1))$ et $G = \mathrm{vect}((0,1,1),(0,1,0))$

1. Montrer que $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ appartiennent à $F+G$.
2. En déduire que $F+G=E$. A-t-on $F \oplus G = E$?

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 10 (𝄞⋆ Rai)**.** Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires de E. Montrer que P et I sont supplémentaires dans E.

Exercice 11 (⋆⋆ Rai, Rec YT)**.** Soit $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax+b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 12 (⋆⋆ Rec, Rai)**.** Soient l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([\,0\,;\pi\,],\mathbb{R})$.
$F = \{f \in E,\ f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et $G = \mathrm{vect}(\cos,\sin)$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 13 (⋆⋆ Rec, Rai ©)**.** Soient $E = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Trouver un supplémentaire de F.

Exercice 14 (⋆⋆ Rai)**.** Soit $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad (u_n)_n \text{ converge}\}$. On pose $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$ et $G = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad (u_n)_n \text{ est une suite constante}\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Familles libres

Exercice 15 (⋆⋆)**.** Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille liée de vecteurs de E (un $\mathbb{K}$-EV). Montrer qu'il existe $j \in [\![\,1\,;n\,]\!]$ tel que $e_j \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{j-1})$.

Exercice 16 (𝄞⋆ Cou, Rai)**.** Considérons $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soient $a < b$ deux réels, on pose $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ et $g\colon x \mapsto \mathrm{e}^{bx} \in E$ montrer que f et g sont indépendantes dans E.

Exercice 17 (𝄞⋆ Cou, Rai)**.** Considérons $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soient $a < b$ deux réels, on pose $f\colon x \mapsto |x-a|$ et $g\colon x \mapsto |x-b| \in E$ montrer que f et g sont indépendantes dans E.

Exercice 18 (𝄞⋆⋆ Rec ©)**.** Généraliser l'exercice 16 (resp. 17) dans le cas de n fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{a_i x}$ (resp. $x \mapsto |x - a_i|$) avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Exercice 19 (⋆ Cal YT)**.** Les familles suivantes sont-elles des familles libres de $\mathbb{R}^3$?

1. $x_1 = (1,0,1)$ et $x_2 = (1,2,2)$
2. $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (2,1,-1)$ et $x_3 = (1,-1,-2)$
3. $x_1 = (1,-1,1)$, $x_2 = (2,-1,3)$ et $x_3 = (-1,1,-1)$
4. $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (2,3,1)$ et $x_3 = (-4,1,0)$

Exercice 20 (⋆ Cal © YT)**.** Montrer que $(1)_n$, $(2^n)_n$ et $(3^n)_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 21 (⋆⋆ Rai, Cal)**.**

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Calculer
$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $f_i\colon x \mapsto \cos(ix)$ pour $i \in [\![\,1\,;n\,]\!]$. En déduire que $(f_i)_{i \in [\![\,1\,;n\,]\!]}$ est une famille libre.

Exercice 22 (⋆ Rai, Cal ©)**.** Dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{F}([\,0\,;2\pi\,],\mathbb{R})$ on note
$$f_1 = \cos,\ f_2 = \sin \quad \forall x \in [\,0\,;2\pi\,],\ f_3(x) = x\cos(x),\ f_4(x) = x\sin(x)$$
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre de E.

Bases d'un espace vectoriel

Exercice 23 (⋆ Cal, Cou YT)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, on pose
$$e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,1,0),\ e_3 = (0,1,1)$$

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$?

Exercice 24 ($\star$ Cal, Cou)**.** Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$P_1 = X^2 + 1 \quad P_2 = X^2 + X - 1 \quad \text{et} \quad P_3 = X^2 + X$$

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ un vecteur exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$?

Exercice 25 ($\star$ Cal, Rai YT)**.** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec M. Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel. En donner une base.

Exercice 26 ($\star$ Cal, Cou)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_3,\ f_2 = e_3 - e_1,\ f_3 = e_1 + 2e_2.$$

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
2. Soit $x \in E$ un vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont connues. Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$?

Inclassable

Exercice 27 ($\star\star$ Rec, Rai, Mod)**.** Dans cet exercice on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et on y définit une multiplication par :

$$\star : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a,b),(a',b')) & \longmapsto (aa' - bb', ab' + a'b) \end{cases}$$

1. Vérifier que pour tout $(a,b), (a',b'), (a'',b'') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a,b) * (a',b') &= (a',b') * (a,b) \\ ((a,b) * (a',b')) * (a'',b'') &= (a,b) * ((a',b') * (a'',b'')) \\ (a,b) * \left[(a',b') + (a'',b'')\right] &= (a,b) * (a',b') + (a,b) * (a'',b'') \end{aligned}$$

2. On pose $\vec{1} = (1,0)$ vérifier $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{1} * (a,b) = (a,b)$
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, montrer qu'il existe $(a',b') \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a,b) * (a',b') = \vec{1}$.
4. On pose $\vec{\mathrm{i}} = (0,1)$, calculer $\vec{\mathrm{i}} * \vec{\mathrm{i}}$
5. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{vect}(\vec{1}, \vec{\mathrm{i}})$.
6. À votre avis, que venons nous de faire ?