



## Objectifs :

- Définir les  $\sim$ ,  $\mathcal{o}$  et  $\mathcal{O}$  (déjà vus pour les suites) pour les fonctions.
- Définir les développements limités et établir les développements usuels à connaître par cœur.
- Savoir les utiliser pour le calcul de limites et les études de fonctions.

Un développement limité d'une fonction  $f$  en un point  $a$  à l'ordre  $n$  est, dit grossièrement, une fonction polynomiale (si elle existe) de degré au plus  $n$  qui approxime le mieux  $f$  au voisinage de  $a$ .



### Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient une animation, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Relation de négligeabilité : <math>\mathcal{o}</math></b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Développements limités en un point <math>a \in \mathbb{R}</math></b>	<b>2</b>
2.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	2
2.2	$DL_n(a)$ obtenus par primitive . . . . .	4
2.3	Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young . . . . .	4
2.4	Opérations sur les $DL_n(0)$ . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Relation d'équivalence : <math>\sim</math></b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Relation de domination : <math>\mathcal{O}</math></b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Applications des développements limités</b>	<b>7</b>

Dans tout ce chapitre,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$  ou une extrémité de  $I$ ,  $f$  et  $g$ ,  $h$  et  $k$  définies sur  $I \setminus \{a\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Si on divise par  $g$ , on sous-entend que  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$  (sauf éventuellement en  $a$ ).

## 1 Relation de négligeabilité : $\mathcal{O}$



### Définition de la relation de négligeabilité

On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $g$  au voisinage de  $a$  si  $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

On note  $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$  ou  $f(x) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ , lire « $f$  est un petit  $\mathcal{O}$  de  $g$  au voisinage de  $a$ ».

### Exemples 1.

- $x^2 \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(x^4)$   $x^4 \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^2)$
- $f(x) \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$  ssi  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .
- Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . Alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  si et seulement si  $f(x) \underset{a}{=} \ell + \mathcal{O}(1)$ .

**Remarque 1.** Si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I \cap [a - \delta; a + \delta] \setminus \{a\} \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ .



### Attention $\mathcal{O}(g)$ est une notation

Si  $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$  et  $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$  n'implique pas que  $f = h$ . De plus,  $f \underset{a}{=} h + \mathcal{O}(g)$  veut dire  $f = h + k$  où  $k \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ .



### Proposition n° 1 : propriétés algébriques des $\mathcal{O}$

- |   |  |
|---|--|
| 1. Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ .  | Bref, $\mathcal{O}(\lambda g) = \mathcal{O}(g)$                    |
| 2. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ alors $\lambda f + h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$ ) | Bref, $\lambda \mathcal{O}(g) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(g)$   |
| 3. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$ .  | Bref, $\mathcal{O}(\mathcal{O}(h)) \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$ |
| 4. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(k)$ alors $fh \underset{a}{=} \mathcal{O}(gk)$ .  | Bref, $\mathcal{O}(g)\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(gk)$             |
| 5. $f = \mathcal{O}(h)$ si et seulement si $fg = \mathcal{O}(hg)$ .   | Bref, $g\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(gh)$                          |
| 6. $f = \mathcal{O}(g + \mathcal{O}(g))$ si et seulement si $f = \mathcal{O}(g)$ .  | Bref, $\mathcal{O}(g + \mathcal{O}(g)) = \mathcal{O}(g)$           |

**Exemple 2.** Si  $f(x) = 51x^3 + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x^3) + 2 + x + \mathcal{O}(x^2 + x^4)$ , simplifier cette écriture.

**Remarque 2.** Les croissances comparées s'interprètent avec les  $\mathcal{O}$  : soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , alors :

- |                          |   |  |
|--------------------------|---|--|
| 1. Si $\beta > 0$ ,      | $\ln^\alpha(x) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(x^\beta)$  | $x^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{\beta x})$        |
| 2. Si $\alpha < \beta$ , | $x^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(x^\beta), \quad x^\beta \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^\alpha), \quad \ln(x)^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\ln(x)^\beta)$ | et $e^{\alpha x} \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{\beta x})$ |

## 2 Développements limités en un point $a \in \mathbb{R}$

Dans cette partie,  $a$  est un réel appartenant à  $I$ .

### 2.1 Définitions et premières propriétés



#### Définition d'un développement limité

On dit que  $f$  a un **développement limité** à l'ordre  $n$  en  $a$  s'il existe  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^n) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \mathcal{O}((x-a)^n)$$

La fonction polynomiale  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$  est la **partie régulière** du développement limité.

On note  $DL_n(a)$  un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ .

**Exemple 3.** À quel ordre, peut-on déduire un développement limité de  $f$  en 0 si  $f : x \mapsto 1 + 5x + 3x\sqrt{x}$  ?



**Exemples importants à connaître sans hésitation**

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$   $DL_n(0)$  de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$   $DL_n(0)$  de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$
- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$   $DL_{2n}(0)$  de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

FIGURE 1 – Plusieurs polynômes approximant  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  en 0.

**Exemple 4.** Si  $f(x) = 3 + 5(x-a) + 8(x-a)^2 - 13(x-a)^3 + \mathcal{O}((x-a)^3)$ , alors  $f(x) = 3 + 5(x-a) + 8(x-a)^2 + \mathcal{O}((x-a)^2)$ .

**Remarque 3.** Si la fonction  $f$  admet un  $DL_n(a)$  et si  $m < n$  alors elle admet un  $DL_m(a)$ . Il suffit de tronquer le développement limité  $DL_n(a)$  à l'ordre souhaité.



**Proposition n° 2 : au plus unicité du développement limité**

Si  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^{n+1}) = \sum_{k=0}^n b_k(x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$ , alors pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $a_k = b_k$ .

**Remarque 4.** Si  $f$  est paire (resp. impaire) et a un  $DL_n(0)$ , alors les coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls.



**Proposition n° 3 : condition nécessaire et suffisante pour avoir un  $DL_0(a)$  ou un  $DL_1(a)$**

1.  $f$  admet un  $DL_0(a)$  ssi  $f$  est continue en  $a$ . Alors  $f(x) = f(a) + \mathcal{O}(x-a)$ .

2.  $f$  admet un  $DL_1(a)$  ssi  $f$  est dérivable en  $a$ . Alors  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \mathcal{O}(x-a)^2$ .



**Proposition n° 4 : translation d'un développement limité**

$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$  ( $DL_n(a)$  de  $f$ ) ssi  $f(a+h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + \mathcal{O}(h^{n+1})$  ( $DL_n(0)$  de  $h \mapsto f(a+h)$ )

**Exemple 5.**  $DL_3(1)$  de  $x \mapsto \frac{1}{2-x}$

**Remarque 5.** Les  $DL_n(0)$  seront les seuls à apprendre. Car, grâce à eux, on pourra trouver des  $DL_n(a)$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .



**Péril imminent au  $\mathcal{O}$**

Dans un DL, n'oubliez jamais le  $\mathcal{O}$ , par exemple, «  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$  » est horriblement faux !

## 2.2 $DL_n(a)$ obtenus par primitive



### Théorème n° 1 : primitive d'un développement limité

Si  $a \in I$  et  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  a un  $DL_{n-1}(a) : f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^{n-1})$ , alors  $F$ , une primitive de  $f$ , admet

$$\text{un } DL_n(a) : \quad F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \mathcal{O}((x-a)^n)$$

**Remarque 6.** Ne pas oublier la constante d'intégration  $F(a)$  lors de la primitivation d'un DL.



### Exemples importants de DL obtenus par primitive d'un DL connu (à connaître par cœur)

$$\bullet \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^n) \quad DL_n(0)$$

$$\bullet \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots - \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^n) \quad DL_n(0)$$

$$\bullet \arctan(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \quad DL_{2n+1}(0)$$

## 2.3 Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young



### Théorème n° 2 : formule de Taylor-Young

Une fonction  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  admet un  $DL_n(a)$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^n)$$



### Exemples d'utilisation de la formule de Taylor-Young (DL à connaître par cœur)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Les fonctions, exponentielle et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ , cos et sin admettent des DL en 0 :

$$\bullet e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^n) \quad DL_n(0)$$

$$\bullet \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \mathcal{O}(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n}) \quad DL_{2n}(0)$$

$$\bullet \sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \quad DL_{2n+1}(0)$$

$$\bullet (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \left( \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) \right) \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^n) \quad DL_n(0)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathcal{O}(x^n)$$

**Exemple 6.** Si  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ , alors  $f^{(k)}(0) = k!$

## 2.4 Opérations sur les $DL_n(0)$



### Proposition n° 5 opérations sur les développements limités

Soient  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  admettant des  $DL_n(0)$  :  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$  et  $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$

1. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f + g$  admet un  $DL_n(0)$  :  $(\lambda f + g)(x) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + b_k) x^k + o(x^n)$

2.  $fg$  admet un  $DL_n(0)$  :  $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) x^k + o(x^n)$

3. De plus, si  $b_0 \neq 0$ , alors  $1/g$  et  $f/g$  admettent des  $DL_n(0)$ .

### Exemples 7.

- 1. Donner le  $DL_3(0)$  de  $f: x \mapsto e^x \sin(x)$ .
- 2. Trouver  $DL_4(0)$  de  $f: x \mapsto \cos^2(x)$
- 3. Trouver le  $DL_2(0)$  de  $\tan^2$  puis le  $DL_5(0)$  de  $\tan$ .
- 4.  $DL_4(0)$  de  $x \mapsto (\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2})/x^3$



### Exemples de nouveaux développements limités à connaître

- 1.  $\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$   $DL_{2n}(0)$
- 2.  $\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$   $DL_{2n+1}(0)$
- 3.  $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$   $DL_7(0)$  à connaître au moins à l'ordre 3



### Comment calculer le développement limité d'une composée ?

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions ayant des  $DL$  en 0 et  $f(0) = 0$ . Pour faire le  $DL_n(0)$  de  $g \circ f$  :

- 1. Écrire le  $DL_n(0)$  de  $f$ , poser une nouvelle variable  $u = f(x)$  avec  $u \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) = 0$  ( $f$  continue).
- 2. Par produits successifs, calculer les  $DL_n(0)$  de  $u^k$ . Soit  $p$  le plus petit entier tel que  $o(u^p) = o(x^n)$ .
- 3. Écrire le  $DL_p(0)$  de  $g: g(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k + o(u^p)$  puis remplacer  $u^k$  par son  $DL_n(0)$  et  $o(u^p)$  par  $o(x^n)$ .

### Exemples 8.

- 1.  $DL_4(0)$  de  $x \mapsto \cos(\sin(x))$
- 2.  $DL_4(0)$  de  $x \mapsto \frac{\exp(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$
- 3.  $DL_5(0)$  de  $x \mapsto \sqrt{\operatorname{ch}(x)}$

## 3 Relation d'équivalence : $\sim$



### Définition de la relation d'équivalence

On dit que  $f$  est **équivalente** à  $g$  en  $a$  si  $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ . On note  $f \sim_a g$  ou  $f(x) \sim_a g(x)$ .

**Remarque 7.** Si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f \sim_a g \iff \exists \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I \cap [a - \delta; a + \delta] \quad |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$

**Exemples 9.** Soit  $f(x) = x^2 + x + 1/x$  et  $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ . Chercher des équivalents de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$  et de  $g$  en  $\pm\infty$ .



### Péril imminent : les équivalents à zéro, sont à bannir

Les équivalents à 0 ou  $+\infty$  n'existent pas.



### Proposition n° 6 : propriétés des équivalents

Soient  $f, g, h, k: I \rightarrow \mathbb{R}$  non nulles au voisinage de  $a$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1.  $f \underset{a}{\sim} f$  (réflexivité)
2. si  $f \underset{a}{\sim} g$  alors  $g \underset{a}{\sim} f$  (symétrie)
3.  $f \underset{a}{\sim} g$  et si  $g \underset{a}{\sim} h$  alors  $f \underset{a}{\sim} h$  (transitivité)
4. Si  $f \underset{a}{\sim} g$  et si  $h \underset{a}{\sim} k$  alors  $fh \underset{a}{\sim} gk$  et  $f/h \underset{a}{\sim} g/k$
5. Si  $f \underset{a}{\sim} g$ , alors  $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$  (si  $f > 0$  et  $g > 0$  ou  $\alpha \in \mathbb{N}$ )
6.  $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o(g)$ .
7. Si  $f \underset{a}{\sim} g$  alors  $h = o(f)$  ssi  $h = o(g)$
8. Soit  $\ell \in \mathbb{R}^*$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  ssi  $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$

**Remarque 8.** On utilise la propriété 7. pour simplifier un  $o$ . Par exemple, si  $f(x) = o(x+1)$  alors  $f(x) = o(x)$ .

**Exemples 10.**  $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ ,  $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1$ ,  $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ ,  $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ ,  $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ , si  $\alpha \neq 0$ ,  $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ ,  
 $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$  (équivalents usuels à connaître)



### Attention aux compositions d'équivalents

Il n'y a pas de résultat du genre : si  $f \underset{a}{\sim} g$  alors  $h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ g$ .

**Exemple 11.** On a  $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ . Que pouvez-vous dire de  $x \mapsto e^{x^2+x}$  et  $x \mapsto e^{x^2}$  ?



### Péril imminent pas d'addition des équivalents

Les sommes d'équivalents c'est mal.

(à recopier autant de fois que nécessaire)

**Exemple 12.**  $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$ , et  $-x \underset{+\infty}{\sim} -1-x$ , à votre avis  $(x+1) - x$  est équivalent à  $x + (-1-x)$  en  $+\infty$  ?

**Remarque 9.** En cas d'envie pressante d'addition (retenez-vous), écrire des DL et les sommer.



### Proposition n° 7 : propriétés des équivalents

Supposons que  $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$

1. Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , alors  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .
2.  $f$  et  $g$  ont le même signe au voisinage de  $a$ .
3. Si  $f \leq h \leq g$  au voisinage de  $a$ , alors  $h(x) \underset{a}{\sim} f(x)$
4. Si  $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow b} a$ , alors  $f(u(t)) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(u(t))$

**Exemples 13.** Déterminer des équivalents des fonctions/suites suivantes au point donné :

1.  $f(x) = \sqrt{x^3+1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  en  $+\infty$
2.  $g(x) = \ln(1+x)$  en  $+\infty$
3.  $h(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$  en 0
4.  $k(x) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$  en 0
5.  $u_n = \frac{n(n+1)}{2} + \ln(n)$  en  $+\infty$
6.  $\sin(1/n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$
7.  $\sin(2x)$  en 0
8.  $\sin(1+x)$  en  $-1$
9.  $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$  quand  $\omega \rightarrow +\infty$ .

**Remarque 10.** Écrire  $e^x \underset{0}{\sim} 1+x$  est juste, tout comme  $e^x \underset{0}{\sim} 1 + \frac{x}{\pi}$  mais ceci est maladroit, l'équivalent nous renseigne seulement sur le terme prépondérant. Ici, on écrira donc  $e^x \underset{0}{\sim} 1$ .

## 4 Relation de domination : $\mathcal{O}$



### Définition de la relation de domination

On dit que  $f$  est **dominée** par  $g$  au voisinage de  $a$  si  $f/g$  est bornée au voisinage de  $a$ .

On note  $f = \mathcal{O}(g)$  ou  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  et on lit «  $f$  est un grand O de  $g$  au voisinage de  $a$  »

**Remarque 11.** Si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f = \mathcal{O}(g) \iff \exists M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in I \cap [a - \delta; a + \delta] \setminus \{a\} |f(x)| \leq M|g(x)|$

**Exemples 14.**  $x = \mathcal{O}(e^x)$ . Comparer  $x \mapsto x^3 \sin(x)$  et  $x \mapsto x^3$  en 0.



### Proposition n° 8 : propriétés des $\mathcal{O}$

Soient  $f, g, h, k: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $a \in I$  ou une extrémité de  $I$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $f = \mathcal{O}(g)$  alors  $f = \mathcal{O}(g)$ .
2. Si  $f \sim g$  alors  $f = \mathcal{O}(g)$  et  $g = \mathcal{O}(f)$ .
3. Si  $f = \mathcal{O}(g)$  et si  $h = \mathcal{O}(g)$  alors  $f + \lambda h = \mathcal{O}(g)$ .
4. Si  $f = \mathcal{O}(g)$  et si  $g = \mathcal{O}(h)$  alors  $f = \mathcal{O}(h)$ .
5. Si  $f = \mathcal{O}(g)$  et si  $h = \mathcal{O}(k)$  alors  $fh = \mathcal{O}(gk)$ .
6.  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  ssi  $f = \mathcal{O}(1)$ .

**Remarque 12.** Écrire  $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$  est plus précis que d'écrire  $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^2)$  ou même  $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x)$ .

## 5 Applications des développements limités



### Définition d'un développement asymptotique

Un développement asymptotique est comme un développement limité mais  $x$  peut tendre vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  et il peut y avoir des termes non polynomiaux comme  $1/x^p$ . Dans les faits, on fait comme si on avait des DL.

**Exemples 15.** 1. Développement asymptotique à la précision de  $\mathcal{O}(1/n^2)$  de  $(e^{\frac{1}{n}})_n$ .

2. Développement asymptotique de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  en  $+\infty$  à la précision de  $\mathcal{O}(x^{-3})$ .



### Péril imminent ne pas appliquer un développement en 0 en un autre point

Écrire  $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^2)$  est faux!



### Une limite classique à connaître

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , trouver la limite de  $(u_n)_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .



### Comment trouver un équivalent ? ( $f$ est équivalente à son premier terme non nul dans son DL)

Si  $f(x) = \sum_{k=p}^n a_k (x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^n)$  avec  $a_p \neq 0$ , alors  $f(x) \underset{a}{\sim} a_p (x-a)^p$



### Comment trouver une limite ?

$f$  a la même limite en  $a$  qu'un équivalent trouvé grâce à la méthode précédente.

**Exemple 16.** Quelle est la limite de  $\frac{\sin(x) - x}{x^3}$  en 0 ?



### Comment étudier la courbe d'une fonction grâce à un DL ?

Si  $f$  a un  $DL_p(a) : f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + \mathcal{O}((x-a)^p)$  avec  $a_p \neq 0$  et  $p \geq 2$ .

Au voisinage de  $a$ ,  $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$  est du même signe que  $a_p(x-a)^p$ .

On connaît donc la position de la fonction par rapport à sa tangente en  $a$  (voir figure 2).

Si jamais,  $f'(a) = 0$ , on a un point critique, suivant la parité de  $p$  et du signe de  $a_p$ , soit on a un maximum local, soit un minimum local, soit un point d'inflexion.

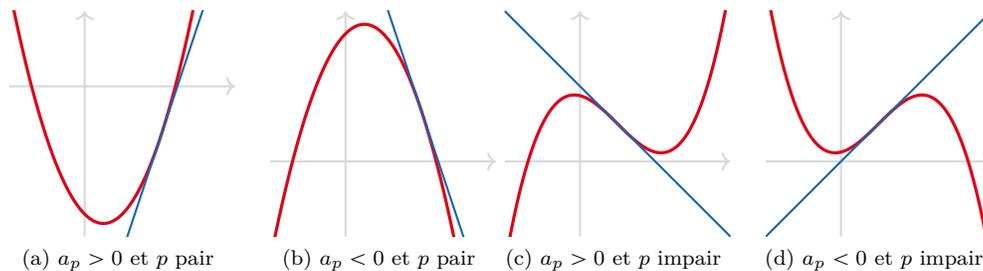


FIGURE 2 – Différents cas, la position de la tangente dépend du signe de  $a_p$  et de la parité de  $p$ .

**Exemple 17.** Posons  $f: x \mapsto 1 + 2x - 5\sqrt{1 + x^3 + x^4}$ , tracer l'allure de  $f$  au voisinage de 0 ?

### Définition d'une asymptote

On dit que  $x \mapsto ax + b$  est une **asymptote** de  $f$  en  $+\infty$  si  $f(x) - (ax + b) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  (idem en  $-\infty$ ).

### Comment trouver l'asymptote de $f$ en $+\infty$ ?

1. Trouver un développement asymptotique de  $f$  de la forme  $f(x) = \alpha x + \beta + \gamma x^{-p} + o(x^{-p})$  avec  $p > 0$ .
2. Alors  $x \mapsto \alpha x + \beta$  est une asymptote de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Si  $\gamma \neq 0$ , le signe de  $\gamma$  permet de connaître la position de  $f$  par rapport à son asymptote.

**Remarque 13.** Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$  (ou  $-\infty$ ) avec  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $x = a$  est une asymptote verticale de  $f$ .

**Exemple 18.** Montrer que  $f: x \mapsto x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$  admet une asymptote en  $+\infty$  et déterminer la position de  $f$  par rapport à cette asymptote.

### Comment déterminer le développement limité d'une fonction réciproque ?

Soit  $f: I \rightarrow J$  bijective.

1. Justifier avec la formule de Taylor-Young que  $f^{-1}$  admet un  $DL_n(a): f^{-1}(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ .  
Si  $a = 0$  et  $f$  est impaire, alors  $f^{-1}$  est aussi impaire et donc  $a_{2k} = 0$  pour tout  $k$ .
2. Écrire le développement limité de  $f$ .
3. Par composition, écrire le développement limité de  $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ . Conclure par unicité des coefficients.

**Exemple 19.** Montrer que  $\text{sh}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  et trouver le  $DL_3(0)$  de  $\text{sh}^{-1}$ . Calculer  $(\text{sh}^{-1})^{(k)}(0)$  pour  $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ .

### Comment déterminer un DA d'une suite définie par récurrence ou implicitement ?

On effectue un DA à un très petit ordre (avec une limite, un équivalent, un encadrement), puis on réinjecte ce DA de façon à en obtenir un plus précis puis on recommence.

**Exemple 20.** Soit  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$ , montrer que  $u_n \in \llbracket n-1; n \rrbracket$ , puis trouver un DA à la précision  $o(1/n)$ .

**Exemple 21.** 1. Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $x^3 + nx = 1$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , notée  $x_n$ .

2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$ . En déduire la limite de  $(x_n)_n$  puis que  $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

3. Montrer que  $x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ .