

Matrices d'une application linéaire

Exercice 1 (★ Cal ©). Dans les bases canoniques respectives, donner les matrices des applications linéaires suivantes :

- $$\begin{cases} \mathbb{C}_4[X] \longrightarrow \mathbb{C}_3[X] \\ P \longmapsto P' \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \int_0^1 P(x) dx \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ (x, y, z) \longmapsto xX^4 + (y+z)X + z \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P \longmapsto (P(0), P''(2) - P'(4)) \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C}) \\ (x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y - 8x \\ 2y + z & x \\ x + y & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice 2 (★ Cal ©). Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est A .

- Exprimer $h(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- Sans calcul matriciel, calculer $h^2(e_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
- Sans calcul matriciel, calculer $h^3(e_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
- Que peut-on en déduire sur h^3 ?
- À l'aide d'un produit matriciel, calculer h^3 .

Exercice 3 (★ Cal, YT). Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $u \in$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est A . Soit $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

- Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer la matrice de u dans cette base.
- En déduire les puissances successives de A .

Exercice 4 (★★ CCP-PSI 2016 YT). Soit $(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2$ tel que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On note

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

- Déterminer $\text{Ker}(A(\alpha, \beta) - I_2)$ et en déterminer une base.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Q(x) = \det(A(\alpha, \beta) - xI_2)$. Montrer que Q est une fonction polynomiale, déterminer ses racines.
- Déterminer une matrice P telle que

$$A(\alpha, \beta) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{pmatrix} P^{-1}$$

- En déduire les puissances successives de $A(\alpha, \beta)$. Que pouvez-vous dire de la suite $(A(\alpha, \beta)^n)_{n \geq 0}$?

Exercice 5 (★ Cal ©). 1. Démontrer que $D = \text{vect}((1, 1, 1))$ et $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3

- Donner la matrice M dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la projection sur P parallèlement à D .
- Donner la matrice M' dans une base adaptée à $P \oplus D$.
- Donner une relation entre M et M' .

Exercice 6 (★★ Cal ©). Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_k: x \mapsto e^{kx}$.

- Que vaut $\dim(F)$ avec $F = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$?
- Soit $\varphi: f \mapsto f'' + f' + 2f$, montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(F)$.
- Donner la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3) .
- Montrer que φ est bijective et donner la matrice de φ^{-1} dans F .
- Trouver une solution de l'équation différentielle $f''(x) + f'(x) + 2f(x) = e^{2x} - e^{3x}$.

Exercice 7 (★ Cal ©). Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^4 , on pose $\mathcal{B}' = ((0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1))$ et $x = (1, 2, 3, 4)$. Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^4 . En utilisant une formule de changement de base donner $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.

Exercice 8 (★★ Cou ©). On note $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + y \\ 5x - y \end{pmatrix} \end{cases}$, \mathcal{B} la base

canonique de \mathbb{R}^2 et \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et donner $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.

- Montrer que $\mathcal{B}' = ((1, 1), (2, 3))$ est une base de \mathbb{R}^2 et donner $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$
- Vérifier que $\mathcal{C}' = ((1, 0, 1), (1, -1, 1), (2, 1, -2))$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner $Q = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'}$
- En utilisant la formule de changement de base, calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$.
- Sans utiliser la formule de changement de base, calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$.
- Donner également $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}'}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}}(f)$

Exercice 9 (★★ Rec, Rai ©). Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de rang r , le but est de montrer que $A = QJ_rP^{-1}$ où $J_r = \sum_{k=1}^r E_{k,k} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et P et Q deux matrices inversibles.

- Soit \mathcal{B} base de E ($\dim(E) = n$) et \mathcal{C} base de F ($\dim(F) = p$). Justifier qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = A$.
- Soit S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$, considérer \mathcal{B}' une base de E adaptée à $S \oplus \text{Ker}(f)$. Comment prendre \mathcal{C}' base de F telle que $J_r = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$?
- Conclure.
- En déduire que $\text{rg}(A^\top) = \text{rg}(A)$.

Exercice 10 (★★ Rec, Cal). Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer de quel type d'endomorphismes particuliers est f ?
- Déterminer des sous-espaces vectoriels qui caractérisent f .
- Donner une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est plus simple.
- Faire le lien entre les deux matrices de f .

Exercice 11 (★ Cou, YT). Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

- Donner l'expression de $u(x, y, z)$
- Trouver une base de $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$, de $\text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$ puis de $\text{Ker}(u + 4\text{Id}_E)$.

- Montrer que la réunion de ces bases est une base de E .
- Trouver D la matrice de u dans cette base.
- Quel est le lien entre A et D ?
- Calculer A^n où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 (★★ Rec). Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que $M^2 = 0_2$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 (★★ Rec). Soit $A = \begin{pmatrix} 100 & 27 \\ -363 & -98 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.
- En déduire une valeur explicite de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 (★★ Rai, Rec). Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$.

- Montrer que f est un automorphisme de E .
- Soit $x \in E$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre.
- Soit $e_1 \in E$ non nul. Montrer que $F = \text{vect}(e_1, f(e_1))$ est stable par f (i.e. $f(F) \subset F$).
- Soit $e_2 \in E \setminus F$. Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de E .
- En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = -I_4$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang, noyau et image

Exercice 15 (★ Cal ©). Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à C . Déterminer $\text{rg}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 16 (★ Cal). Soit $e_1 = (1, 1, 1, 4)$, $e_2 = (2, -1, 0, 1)$, $e_3 = (2, 0, 1, 4)$, $e_4 = (2, 2, 3, -2)$ et $e_5 = (2, 2, 3, -2)$, déterminer le rang de $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

Exercice 17 (★ Rai, Cal). Considérons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.
- Pour chaque λ déterminé à la question précédente, trouver une base de $\text{Ker}(A - \lambda I_2)$.
- Notons \mathcal{B}' la concaténation de ces bases. Montrer que \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}^2 = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.
- Donner la matrice de l'endomorphisme canoniquement associée à A dans la base \mathcal{B}' .
- En déduire que A est semblable à une matrice diagonale.
- En déduire un calcul explicite de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 (♯★★ Rai ©). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |A_{i,j}| < |A_{i,i}|$. Montrer que $\text{Ker}(A) = \{0\}$ puis que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 19 (★ Cal ©). Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \longmapsto (P(1), P(2), P(3)) \end{cases}$. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et \mathbb{R}^3 . Que vaut $\text{rg}(f)$?

Exercice 20 (★★ Rai). On pose, pour $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = P(X+1)$.

- Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et trouver φ^{-1} .
- On note \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ trouver $A_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
- Pour $n = 3$, calculer A_3^{-1} et A_3^5 .

Exercice 21 (★★ Cou ©). Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Pour $X \in E$, on pose $f(X) = AX$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
- Expliciter la matrice de f dans la base canonique de E .
- Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 22 (♯★★ Rai, Rec ©). Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(M) = 1$.

- Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.

2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ sont non nulles avec $q \neq 1$ est-ce que AB est non nulle ?

3. Soient $C \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulles, prouver que CL est de rang 1.

Ainsi, les matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices CL où $C \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Exercice 23 (★ Cal). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, trouver le rang de A .

Exercice 24 (★★ Rai ©). Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent

Divers

Exercice 25 (♯★ Cal ©). Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A la somme des coefficients diagonaux de A : $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$.

- Déterminer la trace de I_n .
- Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de son image puis de son noyau.
- ♯♯ Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que toutes les matrices de u ont la même trace, on note $\text{tr}(u)$ cette valeur.
- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme $P = \det(XI_2 - A)$ en fonction de $\text{tr}(A)$ et de $\det(A)$.
- ♯ Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection que vaut $\text{tr}(p)$?
- Est-ce que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Soit $G = \text{vect}(I_n)$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus G$. Donner l'expression de la projection sur $\text{Ker}(\text{tr})$ parallèlement à G .

Exercice 26 (★★ Cou, Cal, Rai © (CCP PC 2019)). Soit l'application ϕ définie, par pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) = XP'' + (1 - X)P'$

- Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner A , la matrice de ϕ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
3. Que vaut le rang de ϕ ?

On fixe un entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

4. Montrer que $\phi + k\text{Id}_E$ est non injective. Que vaut $\dim(\ker(\phi + k\text{Id}_E))$?
5. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\phi(P_k) = -kP_k$.
6. Justifier que P_k est de degré k .
7. Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.
8. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. Donner, D , la matrice de ϕ dans la base \mathcal{B}' ?
10. Donner une relation entre A et D ?

Exercice 27 (♣☆☆☆ Rec ©). On note N l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux sont nuls et $H = \{AB - BA \mid (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\}$.

1. Montrer que $H \subset \text{Ker}(\text{tr})$.
2. Soit $M \in \text{Ker}(\text{tr})$. En distinguant les cas suivant que M soit ou non une matrice scalaire, en utilisant l'exercice 18 du TD15 et en raisonnant par récurrence, démontrer que M est semblable à une matrice de N .
3. On pose $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale de diagonale est $(1, 2, \dots, n)$. Montrer que $\phi: M \mapsto MD - DM$ est un automorphisme de N .
4. Démontrer que $\text{Ker}(\text{tr}) = H$.

Exercice 28 (☆☆☆ Rec, Rai ©). Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p , montrer qu'il existe H_1, H_2, \dots, H_{n-p} des hyperplans de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} H_i$.
2. Soit maintenant H_1, H_2, \dots, H_p des hyperplans de E , montrer que $\dim(\bigcap_{i=1}^p H_i) \geq n - p$.