Chapitre 18

Dénombrement

Prerequis de ce chapitre : ensembles et applications.
Dans ce chapitre, on indique quelques résultats de dénombrement pour préparer le cours de probabilité. Beaucoup de résultats ne seront pas démontrés de façon rigoureuse. La version de ce poly en ligne contient certaines démonstrations pour les élèves les plus motivés. Pour les autres, l'important étant de comprendre les méthodes de dénombrement.

Table des matières

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition et opérations

Définition du cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini, on appelle cardinal le nombre de ses éléments, et on le note $|E|$ ou $\text{Card}(E)$.

Remarque 1. Cette définition n'est pas très précise, elle ne définit pas ce qu'est un ensemble fini ni ce qu'est le nombre d'éléments. Précisons cette définition : un ensemble E est dit **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi\colon [\![1\,; n]\!] \to E$. On montre alors que le n en question est alors unique, et on note $\text{Card}(E) = n$.

Exemple 1.
- $|\{1, 1, 3, 1, -8\}| =$.
- Soit deux entiers $a \leqslant b$, alors $\text{Card}([\![a\,; b]\!]) = b - a + 1$, en particulier, $\text{Card}([\![1\,; n]\!]) = n$, $\text{Card}([\![0\,; n]\!]) = n + 1$ si $n \in \mathbb{N}$.
- $\text{Card}(\varnothing) = 0$.
- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$ etc. ne sont pas finis.

Proposition n° 1 : partie d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et $A \subset E$, alors : A est fini et $|A| \leqslant |E|$ et $A = E$ ssi $|A| = |E|$

Proposition n° 2 : cardinal de l'union

Soient E un ensemble fini et A et B deux parties de E.

1. Si A et B sont disjointes, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$
2. $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$ $\quad |\overline{A}| = |E| - |A|$ $\quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
3. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des parties de E deux à deux disjointes, alors, $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Exemple 2.
- Dans $[\![0\,; 99]\!]$, combien y a-t-il de nombres entiers qui contiennent au moins un 1 ?
- Sur un jeu de 52 cartes, combien y a-t-il de cartes qui sont des trèfles ou des rois ?

Proposition n° 3 : cardinal du produit

1. Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est un ensemble fini et $|E \times F| = |E| \times |F|$
2. Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis, alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est fini et $\left|\prod_{i=1}^{n} E_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|$

Exemple 3.
- Si on lance un dé puis une pièce, combien y a-t-il de possibilités ?
- À la cantine, il y a 3 entrées, 2 plats et 4 desserts (on peut toujours rêver), combien cela fait de menus possibles ?

Proposition n° 4 : cardinal de l'ensemble des parties de E

Soit E un ensemble fini, alors $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble fini et $|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$

Exemple 4. Si $E = \{1, 2, 3\}$, $|\mathscr{P}(E)| =$

1.2 Applications entre ensembles finis

Proposition n° 5 : fonctions injectives, surjectives et bijectives et cardinaux
Soit E et F deux ensembles.

1. Si $f\colon E \to F$ est bijective, alors E est un ensemble fini ssi F est un ensemble fini et dans ce cas $|E| = |F|$.
2. Si $f\colon E \to F$ injective et que F est un ensemble fini, alors E est un ensemble fini et $|F| \geqslant |E|$.
3. Si $f\colon E \to F$ surjective et que E est un ensemble fini, alors F est un ensemble fini et $|F| \leqslant |E|$.
4. Si E et F sont deux ensembles finis et que $|E| = |F|$ et que $f\colon E \to F$, alors sont équivalents :

$$f \text{ surjective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ bijective}$$

Exemples 5.
- Dans la classe, il existe au moins deux personnes qui sont nés le même mois.
- Si on a $n+1$ pantalons rangés dans n tiroirs, il existe au moins un tiroir avec plus d'un pantalon.

Proposition n° 6 : dénombrement de $\mathscr{F}(E,F) = F^E$
Si E et F deux ensembles finis, alors $\mathscr{F}(E,F) = F^E$ est un ensemble fini et $|\mathscr{F}(E,F)| = |F^E| = |F|^{|E|}$

2 Listes et combinaisons

2.1 p-listes

Définition d'une p-liste (ou d'un p-uplet)

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle p-liste (ou p-uplet) d'éléments de E tout élément de E^p.

Proposition n° 7 : nombre de p-listes
Soit E un ensemble fini, alors le nombre de p-listes d'éléments de E est $|E^p| = |E|^p$

Exemple 6. Un élève a 10 notes de colles (des entiers naturels) comprises entre 4 et 12, combien cela fait-il de possibilités ?

2.2 p-listes d'éléments distincts

Définition de p-listes d'éléments distincts

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle p-liste (ou p-uplet ou p-arrangement) d'éléments distincts de E tout élément $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$, si $i \neq j$, alors $x_i \neq x_j$.

Proposition n° 8 : nombre de p-listes d'éléments distincts/arrangements
Si $|E| = n$ et $p \in [\![1\,;n]\!]$, alors le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$

Exemple 7. Sur une course de 100 cyclistes, combien y a-t-il de podium différents possibles ?

Proposition n° 9 : nombre d'applications injectives
Si $|E| = n$ et $|F| = p$ avec $p \leqslant n$, le nombre de fonctions injectives de F vers E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$

2.3 Permutations

Définition d'une permutation d'un ensemble

Soit E un ensemble fini de cardinal n, on appelle permutation de toute n-liste d'éléments distincts de E.

Proposition n° 10 : nombre de permutations

Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors le nombre de permutations de E est $n!$

Exemple 8. Si on mélange un jeu de 32 cartes combien cela fait-il de possibilités ?

Proposition n° 11 : nombre de bijections

Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|E| = |F| = n$, le nombre de bijections de E vers F est $n!$

2.4 Combinaisons/Parties à p-éléments

Définition d'une partie à p éléments

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$, on appelle partie à p éléments de E (ou p-combinaison de E) tout sous-ensemble de E à p éléments.

Proposition n° 12 : nombre de parties à p éléments

Si $|E| = n$ et $p \in [\![0 ; n]\!]$, le nombre de parties à p éléments de E est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple 9. Sur un jeu de 52 cartes, on tire 5 cartes. Combien cela fait-il de possibilités ?

Proposition n° 13 : propriétés des coefficients binomiaux

Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $p \in [\![0 ; n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ symétrie des coefficients binomiaux
2. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$
3. Pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$ formule du maire
4. Pour tout $k \in [\![2 ; n]\!]$, $k \times (k-1) \times \binom{n}{k} = n \times (n-1) \times \binom{n-2}{k-2}$ formule du maire et de l'adjoint
5. Pour tout $p \in [\![1 ; n-1]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ formule du triangle de Pascal
6. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ formule du binôme de Newton

3 Résumé sous forme de tableau

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, E un ensemble fini à n éléments et F un ensemble fini à p éléments.

Type d'objets	Partie de E (sous-ensemble de E)	Partie de E à p éléments	p-liste d'éléments de E (ou p-uplet)	p-liste d'éléments de E sans répétition (arrangement)
Définition	On dit que F est une partie (ou sous-ensemble) de E si $F \subset E$. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par conséquent, $F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subset E$	On dit que F est une partie de E à p-éléments, si $F \subset E$ et si $\lvert F\rvert = p$.	Une p-liste de E est de la forme $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ ou pour tout i, $a_i \in E$: $E^p = \{(a_1, a_2, \dots, a_p) \quad \forall i \quad a_i \in E\}$	Une p-liste de E, $(a_1, a_2, \dots, a_p)$, est sans répétition si pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$, si $i \neq j$ implique que $a_i \neq a_j$.
L'ordre compte	Non	Non	Oui	Oui
Répétition possible	Non	Non	Oui	Non
Exemple pour $E = \{1,2,3\}$ et $p = 2$	$\varnothing$ $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$ $\{1,2,3\}$	$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,1)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(3,1)$ $(3,2)$ $(3,3)$	$(1,2)$ $(1,3)$ $(2,3)$ $(2,1)$ $(3,1)$ $(3,2)$
Dénombrement	$\lvert\mathscr{P}(E)\rvert = 2^n$	$\binom{n}{p}$ si $p \leqslant n$, 0 sinon	n^p	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, 0 sinon
Interprétation mathématiques	Nombre d'applications de E vers $\{0,1\}$	Nombre de termes de la forme $a^p b^{n-p}$ si on développe $(a+b)^n$	Compte le nombre d'applications de F vers E.	Compte le nombre d'applications injectives de F vers E.
Interprétation : urne avec n boules	Nombre de tirages simultanés d'un nombre quelconque de boules	Nombre de tirages simultanée de p boules	Nombre de tirages successifs de p boules avec remise	Nombre de tirages successifs de p boules sans remise