Primitives

Exercice 1 ($\star$ Cal)**.** Pour chacune des fonctions (on précisera les intervalles au besoin), calculer une primitive.

a) $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^3}$ b) $t \mapsto \cos^3(t)$ c) $\cos^{2025}\sin$

d) $t \mapsto t\arctan(t)$ e) $f\colon t \mapsto \dfrac{1}{t^2-5t+6}$ f) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-4t+6}$

g) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-4t+4}$. h) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ i) $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}$

j) $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$ k) $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ l) $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^{2025}(t)}$

Exercice 2 ($\star$ Cal, Rec, Rai)**.** Grâce à un changement de variable calculer $2\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3 ($\star$ Cal)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-3}^{3}|x-2|\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}}\arcsin(t)\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4 ($\star$ Cal)**.** On pose $g(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le signe de g.
3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5 ($\star$ ©)**.** Pour $x \in \,]0;1[$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Montrer que φ est bien définie sur $]0;1[$.
2. Montrer que φ se prolonge par continuité en 0.
3. Dériver φ sur $]0;1[$.

Exercice 6 ($\star$ Cal, Rai ©)**.** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{1}\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 ($\star\star$ Rec ©)**.**

1. Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b |f|$ si et seulement si f est positive.
2. Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
3. Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 8 ($\star\star$ Rec)**.** Étudier la dérivabilité de $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 9 ($\star\star$ Rai, Cal)**.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x E(t)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(x)$ pour $x \in [0;3]$.
3. F est-elle une primitive de la fonction partie entière ?

Sommes de Riemann

Exercice 10 ($\star$ Rai)**.** Trouver la limite de des suites définies par :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+kn}$ 5. $\displaystyle\sum_{p=n}^{2n-1}\frac{1}{p}$ 6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(k\pi/2n)}{n}$

Exercice 11 ($\star$ Rai)**.** Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+3k)^3}$

Exercice 12 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$,

1. Factoriser $X^{2n}-1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Démontrer que, pour tout $t \in [0;\pi]$, $a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(a^2-2a\cos(t)+1)\,\mathrm{d}t$

Exercice 13 ($\star\star$ Rec ©)**.** Soit $g\colon [0;1] \to [a;b]$ une fonction continue et $\varphi\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \in [a;b]$ et que $\varphi\left(\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(g(x))\,\mathrm{d}x$ (utiliser le résultat de l'exercice 30 du TD11).

Taylor reste intégral

Exercice 14 (⋆⋆ Cal ©)**.** On pose $f : t \mapsto \ln(1+t) \in \mathscr{C}^\infty(]-1\,;+\infty[)$.

1. Calculer $f^{(k)}$ et trouver le maximum de $|f^{(k)}|$ sur $[0\,;1]$
2. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $a = 0$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$$

Exercice 15 (𝄞⋆ Rai, Rec ©)**.** Montrer que la suite $(u_n)_n$, où $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, converge vers e.

Résultats théoriques sur l'intégration

Exercice 16 (𝄞⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^1([a\,;b],\mathbb{R})$, montrer que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exercice 17 (𝄞⋆ ⋆ ⋆ Rai, Rec)**.** Montrer que le résultat de l'exercice 16 est encore vrai si $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b],\mathbb{R})$.

Exercice 18 (𝄞⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^0([a\,;b],\mathbb{R})^2$, on suppose que f est positive. Montrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(c)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 19 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^0([0\,;1],\mathbb{R})$ montrer que si $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, alors f admet un point fixe.

Exercice 20 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Posons la fonction $f : x \mapsto x\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les variations de f.
3. Déterminer $\lim_{x\to-1} f(x)$.

Exercice 21 (⋆ ⋆ ⋆ Rai, Rec ©)**.**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique $a(x) \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^{a(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.
2. Montrer que $x \mapsto a(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Donner un équivalent de $a(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Sujet de concours

Exercice 22 (𝄞𝄞𝄞⋆⋆ Rai, Rec, Cal ©)**.** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer W_0, W_1 et W_2.
3. Montrer que $(W_n)_n$ est décroissante.
4. En déduire que $(W_n)_n$ est une suite convergente.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
7. Montrer que $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Que vaut cette constante ?
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$
9. En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$.
10. En déduire un équivalent de W_n, quelle est la limite de W_n ?
11. Déterminer une expression explicite de W_{2n} et W_{2n+1}.
12. En admettant (provisoirement) que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour un certain $C > 0$, trouver C [1].

1. Cet équivalent s'appelle la formule de Stirling.