Dénombrement

Exercice 1 (⋆ Mod)**.** On souhaite ranger 3 livres de mathématiques, 5 livres de physique et 2 de chimie sur une étagère.

1. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement ?
2. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement en groupant les livres par matières ?

Exercice 2 (⋆ Cal)**.**

1. Combien y a-t-il de polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ dont les coefficients sont dans $\{0,1,2\}$?
2. Combien y a-t-il de matrices de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont dans $\{0,1,2\}$?
3. Dans $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$, combien y a-t-il de produits ?

Exercice 3 (⋆ Cal)**.** On joue un jeu de Poker à 52 cartes où une main consiste à tirer cinq cartes.

1. Combien y a-t-il de mains ?
2. Combien y a-t-il de mains avec un carré (4 cartes de même valeur) ?
3. Combien y a-t-il de mains avec un brelan (exactement 3 cartes de même valeur et pas de paire) ?
4. Combien y a-t-il de quintes (5 cartes de valeurs successives, on précise que l'As est la carte de plus haute valeur, on peut donc pas faire de quantes comme As, 2, 3, 4, 5, ou Dame, Roi,As, 2,3)

Exercice 4 (⋆ Mod ©)**.** Soit $P_1P_2\dots P_n$ un polygone à n sommets. On appelle diagonale tout segment dont les extrémités sont des sommets du polygone qui n'est pas un côté du polygone. Combien y a-t-il de diagonales ?

Exercice 5 (⋆ Mod)**.** Une classe de PCSI avec 42 élèves rentrent dans une salle de 50 places. Combien cela fait-il de plans de classes possibles ?

Exercice 6 (⋆⋆ Mod ©)**.** Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n\leqslant p$ combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]$?

Exercice 7 (⋆⋆ Cal)**.** Combien peut-on faire d'anagrammes avec le mot `maths` et avec le mot `anagrammes` ?

Exercice 8 (𝄞⋆ Cal, Mod)**.** Dans une urne, se trouvent p boules rouges et q boules bleues numérotées entre 1 et $p+q$.

1. Combien y a-t-il de façons de tirer simultanément n boules parmi ces $p+q$ boules avec $n\leqslant p$ et $n\leqslant q$?
2. Soit $k\in[\![0\,;n]\!]$, combien y a-t-il de façons de tirer simultanément n boules avec k boules[1] rouges ?
3. Démontrer que $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p+q}{n}$.
4. Qu'obtient-on dans le cas où $p=q=n$?

Exercice 9 (⋆⋆ Rai)**.** Soit E un ensemble à n éléments et $A\in\mathscr{P}(E)$ tel que $|A|=p$

1. Que vaut le cardinal de $\mathscr{P}(E)$?
2. Combien y a-t-il de $X\in\mathscr{P}(E)$ tel que $X\subset A$?
3. Combien y a-t-il de $X\in\mathscr{P}(E)$ tel que $A\cap X=\varnothing$?
4. Combien y a-t-il de $X\in\mathscr{P}(E)$ tel que $A\subset X$?
5. Combien y a-t-il de couples $(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2$ tel que $X\subset Y$?

Exercice 10 (⋆ Rai)**.** Soit E un ensemble de cardinal $n+1$ et F un ensemble de cardinal n

1. Combien y a-t-il d'applications de E vers F ?
2. Combien y a-t-il d'applications bijectives de E vers F ?
3. Combien y a-t-il d'applications injectives de E vers F ?
4. ⋆⋆ Combien y a-t-il d'applications surjectives de E vers F ?

Exercice 11 (⋆ Rai ©)**.** On part du point $(0,0)$ pour rejoindre le point $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 12 (⋆⋆ Rai ©)**.** On veut répartir n billes numérotées entre 1 et n dans 3 tiroirs.

1. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. Combien y a-t-il de possibilités pour avoir exactement un tiroir vide ?
3. Mêmes questions mais avec des billes indiscernables.

1. Pas la ville.

Exercice 13 ($\star$ Rai)**.** Chacun des 42 élèves de PCSI serrent la main à chacun des 40 élèves de PC après que ceux-ci aient brillamment passé les concours. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

Exercice 14 ($\star$ Rai)**.** Les notes de 40 élèves de PCSI, lors d'un DS de mathématiques, étaient deux à deux distinctes [2].

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums possibles où Charles (Charles Davadant, élève de PCSI en 2022-2023) est premier ?
3. Combien y a-t-il de podiums possibles avec Charles ?
4. En supposant une répartition uniforme, quelle est la probabilité que Charles finisse sur le podium ?

Exercice 15 ($\star\star$ Cal ©)**.** Soit E un ensemble fini, calculer $\sum\limits_{X\in\mathscr{P}(E)} |X|$.

Exercice 16 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit E une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal 13.

1. Calculer $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
2. Montrer qu'il existe $(a,b)\in E^2$ tel que $0<\arctan(a)-\arctan(b)\leqslant\dfrac{\pi}{12}$
3. En conclure que $0<\dfrac{a-b}{1+ab}\leqslant 2-\sqrt{3}$.

Exercice 17 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.**

1. Si $\varphi\colon P\mapsto P(X+1)$, vérifier que $\varphi\in GL(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Donner les matrices de φ et de φ^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, notée, respectivement, $M=(M_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}$ et $N=(N_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}$ où, exceptionnellement, les indices de lignes et de colonnes débutent à 0.
3. Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, on pose, pour $j\in[\![0\,;n]\!]$, $b_j=\sum\limits_{k=0}^{j}\binom{j}{k}a_k$, démontrer que $a_j=\sum\limits_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}b_k$ (formule d'inversion de Pascal).

Soit $(n,j,p)\in\mathbb{N}^3$ tels que $p\geqslant n\geqslant j$, on note $a_{p,j}$ le nombre de surjections de $[\![1\,;p]\!]$ vers $[\![1\,;j]\!]$. $a_{p,j}$ compte aussi le nombre de surjections de E vers F si E est de cardinal p et F de cardinal j.

4. Combien y a-t-il de fonctions de $[\![1\,;p]\!]$ dans $[\![1\,;j]\!]$?
5. Soit $k\in[\![0\,;j]\!]$. Combien y a-t-il de fonctions de $[\![1\,;p]\!]$ dans $[\![1\,;j]\!]$ dont l'image est de cardinal k ?
6. En déduire que $j^p=\sum\limits_{k=0}^{j}\binom{j}{k}a_{p,k}$
7. En déduire la valeur de $a_{p,n}$ à l'aide d'une somme.

Exercice 18 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $n\in\mathbb{N}$, et $(A_0,A_1,\dots,A_n)$ un n-uplet de matrices. On note $C(n)$ le nombre de parenthésages possible que l'on peut effectuer pour calculer le produit $A_0A_1\dots A_n$. Par exemple :

- Si $n=0$, il a A_0, ainsi $C(0)=1$
- Si $n=1$, il a A_0A_1, ainsi $C(1)=1$
- Si $n=2$, il a $(A_0A_1)A_2$ ou $A_0(A_1A_2)$, ainsi $C(2)=2$
- Si $n=3$, $C(3)=5$

En prenant en compte la dernière parenthèse, trouver une expression de $C(n)$ en fonction [3] de $C(0)$, $C(1)$,…, $C(n-1)$.

Exercice 19 (𝄞$\star\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit E un ensemble fini et $A\subset E$.

1. En terme de cardinal, que vaut $\sum\limits_{x\in E}\mathbb{1}_A(x)$?
2. Montrer que $\mathbb{1}_{E\setminus A}=1-\mathbb{1}_A$.
3. Soit $(A_1,A_2,\dots,A_n)$ une famille de parties de E. Justifier que
$$\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{A_i}=\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}$$
4. On pose $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. En utilisant le complémentaire de A et les questions précédentes, écrire le cardinal de A à l'aide d'une somme de cardinaux d'intersections des A_i.

Exercice 20 ($\star\star\star$ Rec)**.** Une soirée a lieu avec exactement n couples. Lorsqu'ils s'aperçoivent, les gens se serrent la main avec les règles suivantes :

1. On ne serre jamais la main à soi-même.
2. On ne serre jamais la main à son conjoint/sa conjointe.
3. On ne sert jamais deux fois la main à la même personne.

2. C'est assez réaliste si on indique suffisamment de chiffres après la virgule.

3. Le cours de deuxième année vous permettra, à partir de cette expression, de trouver une expression explicite de $C(n)$.

À la fin de la soirée, l'un des participants, prend la parole sur une estrade, demande à toutes les autres personnes, combien de mains ces personnes ont serrées. Il obtient des réponses qui sont toutes différentes. Combien de mains cette personne a-t-elle serrées ?