Chapitre 2

Études des fonctions et fonctions usuelles

Objectifs :

- Faire le point en début de PCSI sur l'étude des fonctions à valeurs réelles en adoptant un vocabulaire précis et rigoureux.
- Revoir les notions de la classe de Terminale ainsi que de nouveaux résultats nécessaires à l'étude complète d'une fonction sans pour autant démontrer tous les résultats. Ceux-ci le seront dans des chapitres ultérieurs (limites, continuité, dérivabilité, etc).
- Étudier les fonctions usuelles dont les propriétés doivent être maîtrisées.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définition d'une fonction

Définition d'une fonction

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction** réelle définie sur D à valeurs dans A, un procédé f qui, à $x \in D$, associe un unique élément, noté $f(x) \in A$, appelé **image** de x par f. On note alors $f\colon D \to A$. On dit que D est le **domaine de définition/ensemble de départ** de f et A l'**ensemble d'arrivée**. Si $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f.

Exemples 1.

- Quelle est l'image de 0 par la fonction cos ? Quels sont les antécédents de 1 par $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
- La fonction $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow [\,1\,; +\infty\,[\\ x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} + 2 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $[\,1\,;+\infty\,[$.
- Posons $g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \ln(x+0.5) \end{cases}$ et $h\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(\cos(x)) \end{cases}$. Alors, g et h ne sont pas des fonctions.

Solution des exemples 1 :

- Comme $\cos(0) = 1$, l'image de 0 par cos est 1. Les antécédents de 1 par cos sont exactement les $2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
- En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le nombre $\dfrac{1}{x^2} + 2$ est bien défini et $\dfrac{1}{x^2} + 2 \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{x^2} + 2 \in [\,1\,;+\infty\,[$.
- On a $1/4 \in \mathbb{R}_+^*$, pourtant $g(1/4) = \ln(3/4) \notin \mathbb{R}_+^*$. Pour $x = 3\pi/2 \in \mathbb{R}_+^*$, mais $\cos(3\pi/2) = -1$ donc h n'est pas définie en $3\pi/2$.

Remarque 1. D est donc une partie de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un intervalle) sur laquelle la fonction f est bien définie.

Péril imminent à ne pas confondre fonction et nombre

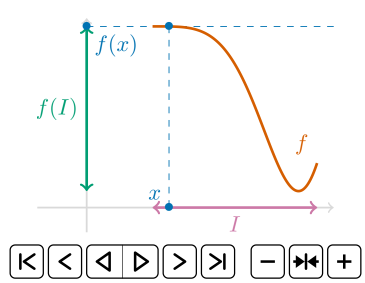
Si $f\colon D \to A$ est une fonction et $x \in D$, alors $f(x)$ est un nombre. Ainsi, «$f(x)$ est dérivable» n'a aucun sens.

Définition du graphe d'une fonction

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, on appelle **graphe/courbe** de f l'ensemble des points : $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$. Le graphe d'une fonction est l'ensemble des points du plan dont l'ordonnée est l'image de l'abscisse.

Définition de l'image d'une fonction

Soit $f\colon D \to A$. L'**image** de f, notée $f(D)$, est l'ensemble des images des éléments de D par f : $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$.



Attention à ne pas confondre image d'une fonction et son ensemble d'arrivée

Il est juste de dire que $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \in \mathbb{R}^+$. Cependant, $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.
D'une manière générale, si $f\colon D \to A$, on a toujours $f(D) \subset A$ mais pas forcément égalité.

1.2 Parité, périodicité

Définition d'une fonction paire/impaire

Soit D un ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 : pour tout $x \in D$, $-x \in D$. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$

- On dit que f est **paire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$: $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f est **impaire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$: $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples 2. La fonction $f\colon x \mapsto x^2$ est paire, la fonction $g\colon x \mapsto x^3$ est impaire.

Solution des exemples 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$, alors évidemment $-x \in \mathbb{R}$ (dans le cas où la fonction est définie sur $\mathbb{R}$, on peut ne pas le préciser), et $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2x^2 = f(x)$ et $g(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -g(x)$, donc f est paire et g est impaire.

Définition d'une fonction périodique

On dit que $f\colon D \to \mathbb{R}$ est **périodique** si $\exists T > 0 \quad \forall x \in D \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$
On dit que T est **une période** de f et que f est T-périodique. Si elle existe, on appelle **période fondamentale** de f la plus petite période de f.

Exemple 3. 6π est une période de sin, mais la période fondamentale de sin est 2π.

Solution de l'exemple 3 : Soit $x \in \mathbb{R}$, notons que le point M sur le cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit x est égal au point N sur le cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{ON}$ soit $x + 6\pi$, en particulier, ils ont la même ordonnée, donc $\sin(x + 6\pi) = \sin(x)$, ainsi la fonction sin est périodique et 6π en est une période. Par le même raisonnement, 2π est aussi une période de sin Soit $T > 0$ une période de sin, alors en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + T) = \sin(x)$, pour $x = \pi/2$, on obtient que $\sin(\pi/2 + T) = 1$, ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi/2 + T = \pi/2 + 2k\pi$, donc $T = 2k\pi$, comme $T > 0$, on en déduit que $k > 0$ donc que $k \geqslant 1$, ainsi $T \geqslant 2\pi$. Ainsi, la plus petite période possible est 2π. La période fondamental de sin est 2π.

Remarque 2. Savoir si une fonction est paire/impaire/périodique permet de réduire son domaine d'étude.

1.3 Opérations sur les fonctions

On connaît les opérations usuelles $(+, -, \times, \div)$ entre les nombres réels. Cependant, les fonctions n'étant pas des nombres, il faut définir la somme, le produit ou le quotient de deux fonctions, ou encore le produit d'un réel par une fonction.

Définition des opérations sur les fonctions

Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on appelle :

- $f + g$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x) + g(x)$, ainsi $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- λf la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\lambda f(x)$, ainsi $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- fg la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x)g(x)$, ainsi, $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- Si, pour tout $x \in D$, $g(x) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, ainsi, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Définition de la composée de deux fonctions

Soient $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. La **composée** de g et f, notée $g \circ f$, est définie par, pour tout $x \in I$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarques 3.

- La composée se déroule suivant le schéma :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & J \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

- Si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies, très souvent, $f \circ g \neq g \circ f$, si $f \circ g = g \circ f$, on dit que les fonctions f et g **commutent**.

Exemples 4.

- Si $f\colon x \mapsto x^2$ et $g\colon x \mapsto x+1$, donner l'expression de $f \circ g$ et $g \circ f$.
- Est-ce que f et g commutent ?
- Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \ln(x^2-3)$?

Solution des exemples 4 :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$ et $g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$, ainsi, $f \circ g\colon x \mapsto (x+1)^2$ et $g \circ f\colon x \mapsto x^2+1$
- Remarquons que $(f \circ g)(1) = 4$ tandis que $(g \circ f)(1) = 2$, ainsi, $f \circ g \neq f \circ g$, dès lors, f et g ne commutent pas.
- Comme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2-3>0$. Or, $x^2-3>0$ ssi $x^2>3$ ssi $x>\sqrt{3}$ ou $x<-\sqrt{3}$. Posons $D = \left]-\infty\,;-\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}\,;+\infty\right[$, ainsi, $f\colon \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto x^2-3 \end{cases}$ et $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $f \circ g\colon x \mapsto \ln(x^2-3)$ est donc définie sur D.

1.4 Variation d'une fonction

Définition d'une fonction (strictement) croissante, décroissante, monotone, constante

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- f est dite **croissante** sur D si $\forall (x,x') \in D^2 \quad x \leqslant x' \implies f(x) \leqslant f(x')$
- f est dite **décroissante** sur D si $\forall (x,x') \in D^2 \quad x \leqslant x' \implies f(x) \geqslant f(x')$
- f est dite **strictement croissante** sur D si $\forall (x,x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) < f(x')$
- f est dite **strictement décroissante** sur D si $\forall (x,x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) > f(x')$
- f est dite (resp. **strictement**) **monotone** sur D si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante sur D.
- On dit que f est **constante** sur D, s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) = C$.

Remarque 4. Si f est strictement croissante sur D alors pour tout $(x,x') \in D^2$, $x < x'$ ssi $f(x) < f(x')$.

Justification de la remarque 4 : Supposons f est strictement croissante sur D. Soit $(x,x') \in D^2$. Si $x < x'$ alors, par définition d'une fonction strictement croissante, $f(x) < f(x')$. Si $x \geqslant x'$ alors comme f est croissante, $f(x) \geqslant f(x')$, par contraposée, si $f(x) < f(x')$ alors $x < x'$.

Exemple 5. La fonction $f\colon x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ ni décroissante sur $\mathbb{R}$, elle n'est donc pas monotone sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et est donc strictement monotone sur cet intervalle.

Solution de l'exemple 5 : Posons $x=-1$ et $x'=0$, alors $x \leqslant x'$ et $f(x) = 1 \nleqslant f(x') = 0$, donc f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. Posons $x=0$ et $x'=1$, alors $x \leqslant x'$ et $f(x) = 0 \ngeqslant f(x') = 1$, donc f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme f n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$, elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. Soit $(x,x') \in {\mathbb{R}_+}^2$, supposons $x < x'$, alors ${x'}^2 - x^2 = (x'-x)(x+x') > 0$ il en découle que $f(x') > f(x)$. Par conséquent, on a montré que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, f est donc monotone sur $\mathbb{R}$.

Proposition n° 1 : variation d'une composée de deux fonctions monotones

Soient $f\colon I \to J$, $g\colon J \to \mathbb{R}$.

1. Si f est (resp. strict.) croissante et g est (resp. strict.) croissante, alors $g \circ f$ est (resp. strict.) croissante.
2. Si f est croissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
3. Si f est décroissante sur I et g est croissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
4. Si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.

Démonstration de la proposition n° 1 :

1. Si f est croissante sur I et g croissante sur J. Soit $(x,x') \in I^2$. Supposons $x \leqslant x'$, alors par croissance de f, $f(x) \leqslant f(x')$. Par croissance de g, on obtient $g(f(x)) \leqslant g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) \leqslant (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est croissante sur I. Si f est strictement croissante sur I et g strictement croissante sur J. Soit $(x,x') \in I^2$. Supposons $x < x'$, alors par croissance stricte de f, $f(x) < f(x')$. Par croissance stricte de g, on obtient $g(f(x)) < g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) < (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est strictement croissante sur I.
2. Si f est croissante sur I et g décroissante sur J. Soit $(x,x') \in I^2$. Supposons $x \leqslant x'$, alors par croissance de f, $f(x) \leqslant f(x')$. Par décroissance de g, on obtient $g(f(x)) \geqslant g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) \geqslant (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est décroissante sur I.
3. Si f est décroissante sur I et g croissante sur J. Soit $(x,x') \in I^2$. Supposons $x \leqslant x'$, alors par décroissance de f, $f(x) \geqslant f(x')$. Par croissance de g, on obtient $g(f(x)) \geqslant g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) \geqslant (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est décroissante sur I.
4. Si f est décroissante sur I et g décroissante sur J. Soit $(x,x') \in I^2$. Supposons $x \leqslant x'$, alors par décroissance de f, $f(x) \geqslant f(x')$. Par décroissance de g, on obtient $g(f(x)) \leqslant g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) \leqslant (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est croissante sur I. ■

1.5 Fonctions minorées, majorées, bornées

Définition d'une fonction minorée, majorée, bornée

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- On dit que la fonction f est **majorée** sur D si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \qquad f(x) \leqslant M$
- On dit que la fonction f est **minorée** sur D si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geqslant m$
- On dit que f est **bornée** sur D si f est majorée et minorée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in D \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

Remarque 5. On dit que m est **un minorant** de f et M est **un majorant** de f. S'ils existent, les minorants/majorants ne sont pas uniques !

Exemples 6.
- La fonction exp est minorée sur $\mathbb{R}$ par -4 mais n'est pas majorée et n'est pas bornée.
- La fonction sin est bornée sur $\mathbb{R}$: 5 est un majorant et -3 est un minorant de sin.

Proposition n° 2 : une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est majorée

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. Alors f est bornée D ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant M$.

Démonstration de la proposition n° 2 : Raisonnons par double implication :
- S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant M$. Soit $x \in D$.
  — Si $f(x) \geqslant 0$, alors $0 \leqslant |f(x)| = f(x) \leqslant M$
  — Si $f(x) \leqslant 0$, $0 \leqslant |f(x)| = -f(x) \leqslant M$ et donc $-M \leqslant f(x) \leqslant 0$.
  Dans tous les cas, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$. Ainsi, la fonction est majorée par M et minorée par $-M$.
- Supposons que f soit bornée, alors il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in D$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Remarquons alors que $M \leqslant |M| \leqslant \max(|M|, |m|)$. De même $m \geqslant -|m| \geqslant -\max(|M|, |m|)$, Notons $\tilde{M} = \max(|M|, |m|)$, alors pour tout $x \in D$, on a $-\tilde{M} \leqslant f(x) \leqslant \tilde{M}$.
  — Si $f(x) \geqslant 0$, alors $|f(x)| = f(x) \leqslant \tilde{M}$.
  — Si $f(x) \leqslant 0$, alors $|f(x)| = -f(x) \leqslant -(-\tilde{M}) = \tilde{M}$.
  Dans tous les cas, on a montré que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant \tilde{M}$. ■

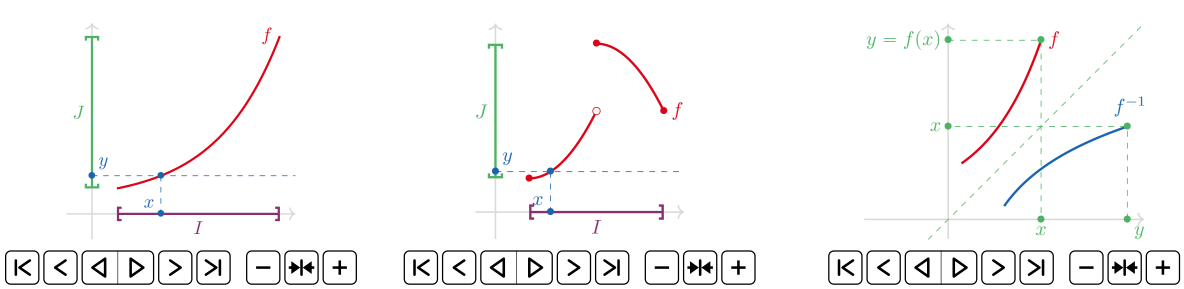
1.6 Fonction bijective

Définition d'une bijection et bijection réciproque

On dit que $f\colon I \to J$ est **bijective/une bijection** si tout $y \in J$ admet un unique antécédent par f dans I i.e. :

$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \qquad y = f(x)$$

On pose alors $f^{-1}(y) = x$, ceci définit une fonction $f^{-1}\colon \begin{cases} J \longrightarrow I \\ y \longmapsto f^{-1}(y) \end{cases}$ appelée **bijection réciproque** de f.



(a) f continue et strictement monotone.

(b) f non continue et non monotone.

(c) Construction de la bijection réciproque f^{-1}

FIGURE 1 – Fonctions $f\colon I \to J$ bijectives : pour tout $y \in J$, la droite horizontale de hauteur y coupe la courbe de f.

Exemple 7. Montrer que l'application $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x+2 \end{cases}$ est bijective et trouver sa bijection réciproque.

Solution de l'exemple 7 : Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche à montrer que l'équation, d'inconnue x, $y = f(x)$ admet une et une seule solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$y = f(x) \iff y = 3x+2 \iff y-2 = 3x \iff x = \frac{y-2}{3}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, y admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ pour la fonction f et cet antécédent est $(y-2)/3$. Ainsi, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et $f^{-1}(y) = (y-2)/3$, ainsi la bijection réciproque de f est $f^{-1}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \dfrac{y-2}{3} \end{cases}$. Si on n'aime pas que y soit la variable, comme elle est muette, on peut aussi noter , $f^{-1}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x-2}{3} \end{cases}$.

Proposition n° 3 : propriétés d'une bijection et de sa bijection réciproque

Si f est une bijection de I vers J.

1. $\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$
2. $\forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) = y \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$
3. $f^{-1}\colon J \to I$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
4. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $y = x$

Démonstration de la proposition n° 3 :

1. Soit $x \in I$. On pose $y = f(x) \in J$. Alors, comme f est bijective, x est l'unique antécédent de y par f, ainsi, par définition de f^{-1}, $x = f^{-1}(y)$. Dès lors, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.
2. Soit $y \in J$. Il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$ et, par définition de f^{-1}, $f^{-1}(y) = x$, ainsi $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.
3. Rappelons que $f^{-1}\colon J \to I$. Soit $x \in I$, posons $y = f(x) \in J$, alors par définition, $f^{-1}(y) = x$. Ceci prouve que x admet un antécédent pour la fonction f^{-1}. Soit y' un antécédent de x par f^{-1} : $x = f^{-1}(y)$, si on applique la fonction f, on obtient $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y'$. Mais $f(x) = y$. Dès lors, $y' = y$. Ainsi, il y a unicité de l'antécédent de x par f^{-1}. Ceci prouve que f^{-1} est bijective. De plus, on a prouvé que pour tout $x \in I$, $(f^{-1})^{-1}(x) = y = f(x)$. Ceci prouve que $(f^{-1})^{-1} = f$.
4. Soit $x \in I$ posons $y = f(x) \in J$ de sorte que $A = (x, y) \in \mathcal{C}_f$. De plus, $x = f^{-1}(y)$ Définissons $B = (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$. Démontrons que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dont $\overrightarrow{u} = (1, 1)$ est un vecteur directeur, or,

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u} \right\rangle = (y-x) \times 1 + (x-y) \times 1 = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est bien perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$. De plus le milieu du segment $[A, B]$ est $\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y+x}{2}\right)$ et il appartient bien à la droite d'équation $y = x$. Ceci démontre que B est bien le symétrique de A par rapport à la droite d'équation $y = x$.

De même, si $y \in J$, posons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $B = (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$, alors $A = (x, y) \in \mathcal{C}_f$ et A est bien le symétrique de B par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Ainsi, tous les points de $\mathcal{C}_f$ admettent un symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ qui est sur $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ et tous les points de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admettent un symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ qui est sur $\mathcal{C}_{f^1}$. Ceci démontre que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. ■

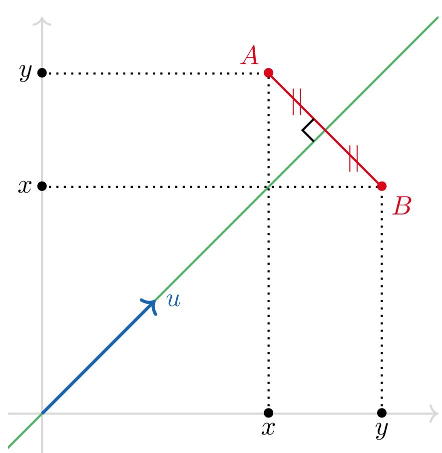


FIGURE 2 – Les points A et B sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Théorème n° 1 de la bijection strictement monotone *(continuité admise, $f(I)$ admis provisoirement)*

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors $f\colon I \to f(I)$ est bijective et $f(I)$ vaut :

	$I = [\,a\,;b\,]$	$I = [\,a\,;b\,[$	$I =]\,a\,;b\,]$	$I =]\,a\,;b\,[$
f strict. croissante	$[\,f(a)\,;f(b)\,]$	$\left[\,f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,\right[$	$\left]\,\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)\,\right]$	$\left]\,\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,\right[$
f strict. décroissante	$[\,f(b)\,;f(a)\,]$	$\left]\,\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)\,\right]$	$\left[\,f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,\right[$	$\left]\,\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,\right[$

De plus, $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue sur $f(I)$ et est strictement monotone et de la même monotonie que f.

Démonstration du théorème n° 1 :

- Montrons que $f\colon I \to f(I)$ est bijective. Soit $y \in f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$, alors il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, tout élément de $f(I)$ admet bien au moins un antécédent. Soient $y \in f(I)$ et $(x, x') \in I^2$. Supposons que $y = f(x) = f(x')$, alors :
  — Si $x < x'$ et que f est strictement croissante, alors $f(x) < f(x')$ donc $y < y$ ce qui est impossible.
  — Si $x > x'$ et que f est strictement croissante, alors $f(x) > f(x')$ donc $y > y$ ce qui est impossible.
  — Si $x < x'$ et que f est strictement décroissante, alors $f(x) > f(x')$ donc $y > y$ ce qui est impossible.
  — Si $x > x'$ et que f est strictement décroissante, alors $f(x) < f(x')$ donc $y < y$ ce qui est impossible.
  Dès lors, $x = x'$, ainsi y admet un et seul antécédent. On a donc montré que $f\colon I \to f(I)$ est bijective.
- On admet provisoirement la valeur de $f(I)$ (sera démontrée au chapitre limites et continuité)
- On admet que $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue (la preuve sera présente dans le polycopié du chapitre limites et continuité mais n'est pas exigible)
- Montrons que f^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que f.
  — Si f est strictement croissante sur I, montrons que f^{-1} l'est aussi. Soient $(y, y') \in f(I)^2$, supposons $y < y'$. On cherche à montrer que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Supposons que $f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(y')$, alors comme f est croissante, on en déduit que $f(f^{-1}(y)) \geqslant f(f^{-1}(y))$ donc $y \geqslant y'$ ce qui est absurde. Dès lors, $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.
  — Si f soit strictement décroissante sur I, montrons que f^{-1} l'est aussi. Soient $(y, y') \in f(I)^2$, supposons $y < y'$. On cherche à montrer que $f^{-1}(y) > f^{-1}(y')$. Supposons que $f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y')$, alors comme f est décroissante, on en déduit que $f(f^{-1}(y)) \geqslant f(f^{-1}(y))$ donc $y \geqslant y'$ ce qui est absurde. Dès lors, $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. ■

Exemples 8.
- $f\colon x \mapsto x^3$ est une bijection de $[\,-1\,;2\,[$ vers $[\,-1\,;8\,[$.
- Démontrer que $g\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un ensemble à déterminer.

Solution des exemples 8 :

- La fonction f est strictement croissante sur $[\,-1\,;2\,[$ (en effet, si $x < x'$, alors $x'^3 - x^3 = (x' - x)(x'^2 + xx' + x^2) > 0$) et continue, ainsi, d'après le théorème n° 1 de la bijection strictement monotone, f est une bijection de $[\,-1\,;2\,[$ vers
$$\left[\,f(-1)\,;\lim_{x\to 2^-} f(x)\,\right[= [\,-1\,;8\,[$$
- Comme $x \mapsto -x$ est strictement décroissante et que exp est strictement croissante, on en déduit, par composée, que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de plus, par composée, g est continue sur $\mathbb{R}_+$, ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+ = [\,0\,;+\infty\,[$ vers $\left]\,\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,;g(0)\,\right] =]\,0\,;1\,[$.

Remarque 6. Quand on applique ce théorème toujours préciser les ensembles de départ et d'arrivé considérés. On verra plus tard que si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est nécessairement un intervalle.

1.7 Dérivée d'une fonction

À partir de maintenant $f\colon I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition du nombre dérivé en un point a

On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarque 7. La fonction f est dérivable en a ssi $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Dans ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

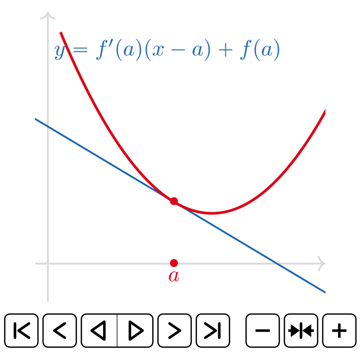
Exemple 9. Montrer que la fonction carrée est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exemple 9 : Soit $a \in \mathbb{R}$, étudions la dérivabilité de $f\colon x \mapsto x^2$ par les deux limites possibles :

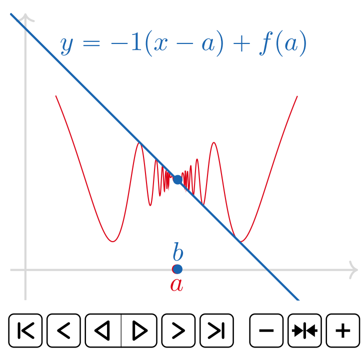
- Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a \xrightarrow[x\to a]{} = 2a$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.
- Soit $h \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h \xrightarrow[h\to 0]{} 2a$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Définition de la tangente en un point a sur lequel f est dérivable

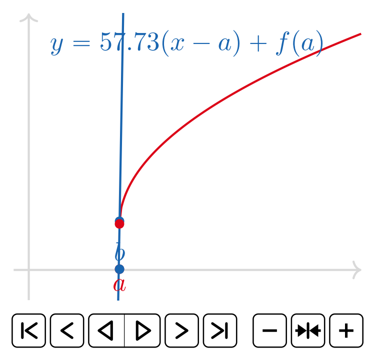
Si f est dérivable en $a \in I$, alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée **tangente** de f en a.



(a) Fonction dérivable en a.



(b) Fonction non dérivable en a, le taux d'accroissement entre b et a n'a pas de limite quand b tend vers a.



(c) Fonction non dérivable en a, le taux d'accroissement entre b et a tend vers $+\infty$ quand b tend vers a.

Remarque 8. Le signe de $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ détermine la position de la courbe par rapport à sa tangente en a.

Définition d'une fonction dérivable et fonction dérivée

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** l'application $f'\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$.

Remarque 9. Cette fonction dérivée f se note aussi en physique $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Quand la variable est t, on a aussi la notation $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ou même $\dot{\theta}$ pour des fonctions angulaires.

Proposition n° 4 : somme/produit/quotient de fonctions dérivables *(admis provisoirement)*

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

- Combinaison linéaire : la fonction $\lambda f + g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
- Produit : la fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$
- Quotient : Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Proposition n° 5 : composée de fonctions dérivables *(admis provisoirement)*

Soient $f\colon I \to J$ dérivable sur I et $g\colon J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J. Alors, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g\circ f)' = f' \times (g' \circ f)$

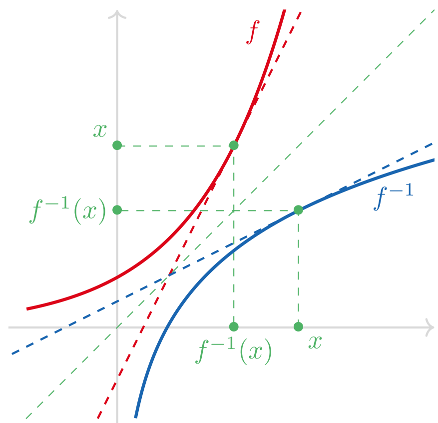
Exemples 10. Dériver $x \mapsto \cos(x^2)$, $x \mapsto \exp(u(x))$, $x \mapsto \ln(u(x))$, $x \mapsto \sin(u(x))$, $x \mapsto (u(x))^n$, où u est une fonction dérivable sur I (strictement positive dans le cas du ln) et $n \in \mathbb{N}$.

Solution des exemples 10 :

- Posons $f\colon x \mapsto x^2$ et $g\colon x \mapsto \cos$, alors f et g sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$, par composée, $(g \circ f)\colon x \mapsto \cos(x^2)$ est dérivable de dérivée $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = 2x(-\sin(x^2))$
- Posons $f\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto u(x) \end{cases}$ et $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp(x) \end{cases}$, alors f est dérivable sur I et g est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée $g \circ f\colon x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée, $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = u'(x)\exp(u(x))$.
- Posons $f\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto u(x) \end{cases}$ et $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) \end{cases}$, alors f est dérivable sur I et g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée $g \circ f\colon x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée, $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = u'(x)\dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- Posons $f\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto u(x) \end{cases}$ et $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$, alors f est dérivable sur I et g est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée $g \circ f\colon x \mapsto \sin(u(x))$ est dérivable de dérivée, $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = u'(x)\cos(u(x))$.
- Posons $f\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto u(x) \end{cases}$ et $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n \end{cases}$, alors f est dérivable sur I et g est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée $g \circ f\colon x \mapsto u(x)^n$ est dérivable de dérivée, $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = u'(x)n(u(x))^{n-1}$.

Théorème n° 2 de la dérivée de la bijection réciproque *(admis provisoirement)*

Soient $f\colon I \to J$ une bijection et $x \in J$. Si f est dérivable en $f^{-1}(x)$ et que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, alors, $f^{-1}\colon J \to I$ est dérivable en x et :
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



Remarque 10. Les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques à la droite d'équation $y = x$. Si $f'(f^{-1}(x)) = 0$ alors f admet une tangente horizontale en $f^{-1}(x)$ et donc f^{-1} admet une tangente verticale en x.

Théorème n° 3 : dérivées et fonctions constantes, (strictement) monotones *(admis provisoirement)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante.

2 Fonctions usuelles

2.1 Logarithme

Définition du logarithme népérien

L'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 est appelée fonction **logarithme népérien** et est notée ln.

Proposition n° 6 : propriétés du logarithme

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
4. $\ln' : x \mapsto x^{-1}$
5. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
6. $\ln(1/a) = -\ln(a)$
7. $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
8. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$
9. $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
10. $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$
11. $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective
12. $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$

Démonstration de la proposition n° 6 :

1. Par définition, ln est une fonction qui s'annule en 1.
2. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$.
3. Par définition, ln est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
4. Comme ln est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$.
5. Fixons $b > 0$ et posons, pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln(xb) - \ln(x) - \ln(b)$, $x \mapsto xb$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composé, $x \mapsto \ln(xb)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{b}{xb} - \dfrac{1}{x} - 0 = 0$, ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, pour tout $x > 0$,
$$f(x) = f(1) = \ln(b) - \ln(1) - \ln(b) = 0$$
Ainsi, $\ln(xb) = \ln(x) + \ln(b)$.
6. En prenant $b = 1/a$, on obtient $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) = \ln(1) = 0$. Ainsi, $\ln(a) + \ln(1/a) = 0$ d'où $\ln(1/a) = -\ln(a)$.
7. $\ln(a/b) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
8. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$\ln(a^n) = n\ln(a)$». Pour $n = 0$, $\ln(a^n) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a) = n\ln(a)$, ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$, ainsi $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{Z}_-$, alors $\ln(a^n) = \ln(\frac{1}{a^{-n}}) = -\ln(a^{-n}) = (-1) \times (-n)\ln(a) = n\ln(a)$.
9. La fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car sa dérivée est positive), ainsi ln admet une limite en $+\infty$. Notons ℓ cette limite, soit $\ell = +\infty$ soit $\ell \in \mathbb{R}$. Comme la fonction ln est croissante, on en déduit que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant \ell$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2^n) \leqslant \ell$, donc $n\ln(2) \leqslant \ell$. Dès lors, comme $\ln(2) > 0$, $n \leqslant \frac{\ell}{\ln(2)}$, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, $+\infty \leqslant \frac{\ell}{\ln(2)}$, ainsi, nécessairement, $\ell = +\infty$. Par conséquent, $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
10. $\ln(x) = -\ln(1/x)$, or $1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, ainsi, $\ln(1/x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, dès lors, $\ln(x) = -\ln(1/x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$.
11. Comme la dérivée de ln est strictement positive, ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème n° 1 de la bijection strictement monotone, ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers
$$\ln(\mathbb{R}_+^*) = \left]\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\,;\lim_{x\to+\infty}\ln(x)\right[= \left]-\infty\,;+\infty\right[= \mathbb{R}$$
12. Posons, pour $x > -1$, $f(x) = x - \ln(1+x)$. Par différence et composée, f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et
$$f' : x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$
D'une part, pour $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$, ainsi, f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc, pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$.
D'autre part, pour $x \in]-1\,;0]$, $f'(x) \leqslant 0$, ainsi f est décroissante sur $]-1\,;0]$, donc pour $x \in]-1\,;0]$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$. Dès lors, pour $x > -1$, $x - \ln(1+x) \geqslant 0$ donc $\ln(1+x) \leqslant x$.

Remarque 11. Le logarithme en base 10 (resp. 2) est défini par, si $x > 0$, $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ (resp. $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$). Ces fonctions ont des propriétés similaires au logarithme népérien, mais $\log_{10}(10) = 1$ et $\log_2(2) = 1$.

2.2 Exponentielle

Définition de la fonction exponentielle

La bijection réciproque de $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est appelée **exponentielle** et notée exp.

Proposition n° 7 : propriétés de la fonction exponentielle

Pour tout $(a, a', b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$:

1. $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective
2. $b = \exp(a) \iff a = \ln(b)$
3. $\exp(0) = 1$
4. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$
5. $\exp' = \exp$
6. $\exp(a + a') = \exp(a)\exp(a')$
7. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
8. $\exp(a - a') = \dfrac{\exp(a)}{\exp(a')}$
9. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(a)^n = \exp(an)$
10. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \geqslant 1 + x$
11. $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
12. $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

Démonstration de la proposition n° 7 :

1. Comme $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective, $\exp = \ln^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective d'après la proposition n° 3 sur les fonctions bijectives.
2. Si $b = \exp(a)$, alors $\ln(b) = \ln(\exp(a)) = a$, de même si $a = \ln(b)$, alors $\exp(a) = \exp(\ln(b)) = b$ (d'après la proposition n° 3 sur les fonctions bijectives).
3. Comme $\ln(1) = 0$, alors $\exp(0) = \exp(\ln(1)) = 1$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction ln est dérivable au point $\exp(x)$ et $\ln'(\exp(x)) = \dfrac{1}{\exp(x)} \neq 0$, ainsi d'après le théorème n° 2 de la dérivabilité de la bijection réciproque, exp est dérivable en x.
5. En utilisant encore le théorème n° 2, on obtient :
$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$$
6. $\exp(a + a') = \exp(\ln(\exp(a)) + \ln(\exp(a'))) = \exp(\ln(\exp(a)\exp(a'))) = \exp(a)\exp(a')$
7. D'après le point précédent, $1 = \exp(0) = \exp(a + (-a)) = \exp(a)\exp(-a)$ comme $\exp(a) \neq 0$, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.
8. En utilisant les points précédents, $\exp(a - a') = \exp(a + (-a')) = \exp(a)\exp(-a') = \dfrac{\exp(a)}{\exp(a')}$
9. Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(a)^n = \exp(\ln(\exp(a)^n)) = \exp(n\ln(\exp(a))) = \exp(na)$
10. Posons $f\colon x \mapsto \exp(x) - 1 - x$, alors par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'\colon x \mapsto \exp(x) - 1$.
    - Comme exp est croissante (car ln est strictement croissante), pour $x \geqslant 0$, $\exp(x) \geqslant \exp(0)$ et donc $f'(x) \geqslant 0$, ainsi, f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, donc pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.
    - Pour $x \leqslant 0$, $\exp(x) \leqslant \exp(0)$ et donc, $f'(x) \leqslant 0$, ainsi f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_-$, donc pour $x \leqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.

    Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$ donc $\exp(x) \geqslant 1 + x$.
11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 1 + x$, et $1 + x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, par comparaison, $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
12. Posons $X = -x$, alors $\exp(x) = \exp(-X) = \dfrac{1}{\exp(X)}$, or $X \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $\exp(X) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et donc par inverse de limite, $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

■

Remarques 12.
- La fonction exp est la seule fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0.
- Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on peut définir la fonction exponentielle en base a par $x \mapsto \exp(x\ln(a))$. On obtient une fonction qui vaut a en 1, qui transforme les sommes en produit et dont la dérivée est $x \mapsto \ln(a)\exp(x\ln(a))$.

2.3 Fonctions puissances

Définition de la puissance

On définit x^α dans plusieurs cas :

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{n \text{ fois}}$, par convention, $x^0 = 1$.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}_-$, on pose pour $x \in \mathbb{R}^*$, $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose pour $x > 0$, $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$.

Dans tous les cas, ceci définit une fonction $p_\alpha\colon x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 13.
- Si le calcul de x^α rentre dans plusieurs cas, on obtient le même résultat.
- En notant $\mathrm{e} = \exp(1)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \exp(x\ln(\mathrm{e})) = \mathrm{e}^x$.
- De même, pour $a > 0$ et $x > 0$, $\exp(x\ln(a)) = a^x$

Attention à ne pas confondre exponentielle et puissance

Ne pas confondre $x \mapsto a^x = \exp(x\ln(a))$ (exponentielle en base a) avec $p_\alpha : x \mapsto x^a = \exp(a\ln(x))$ (puissance) !

Proposition nº 8 : propriétés de la fonction puissance

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

1. $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ (aussi vrai si $(x, y, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$ ou si $(x, y, \alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{Z}^2$)
2. $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$, sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$, de dérivée $p'_\alpha : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
3. Si $\alpha > 0$, p_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
4. Si $\alpha < 0$, p_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

Remarque 14. Si $\alpha > 0$, on pose $p_\alpha(0) = 0$, ainsi la fonction p_α est maintenant définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ (et non $\mathbb{R}_+^*$).

	$\alpha = 0$	$\alpha \in \mathbb{N}^*$	$\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$
$p_\alpha(x) =$	$x^0 = 1$	$x^\alpha = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{\alpha \text{ fois}}$	$x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$	$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$ ($p_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 0$)
Définie pour $x \in$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 0$)
Continue sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 0$)
Dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 1$)
Fonction dérivée	$x \mapsto 0$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ ($p'_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 1$)
Limite en 0^+	1	0	$+\infty$	0 si $\alpha > 0$, $+\infty$ si $\alpha < 0$
Limite en $+\infty$	1	$+\infty$	0	$+\infty$ si $\alpha > 0$, 0 si $\alpha < 0$

TABLE 1 – Résumé des propriétés des fonctions puissances.

Exemple la fonction racine n-ième

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
- Si $n \in \mathbb{N}$ est impair, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Remarque 15. Pour $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Proposition nº 9 : croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

1. $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
2. $\dfrac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
3. $\dfrac{x}{\exp(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
4. $\dfrac{x^\beta}{\exp(\alpha x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
5. $x\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
6. $|x|^\beta \mathrm{e}^{\alpha x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
7. $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$
8. $x^\alpha|\ln(x)|^\beta \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

Démonstration de la proposition n° 9 :

1. Soit $x > 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{2\ln(\sqrt{x})}{x} \leqslant \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Par encadrement, $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Soit $x > 1$, $\dfrac{\ln^{\alpha}(x)}{x^{\beta}} = \left(\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^{\alpha} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{\ln(x^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^{\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{x}{\exp(x)} = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\right)^2 \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{4}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
4.
5.
6.
7.
8. ■

2.4 La valeur absolue

Définition de la valeur absolue

La fonction $x \mapsto |x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée **valeur absolue**.

Proposition n° 10 : propriétés de la valeur absolue

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $|-x| = |x|$ (la valeur absolue est paire)
2. $|xy| = |x| \times |y|$
3. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
4. $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ (2nd inégalité triangulaire)
5. $|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r$
6. $|x| < r \iff -r < x < r$,
7. $|x| = r \iff x = \pm r$
8. $|x| \geqslant r \iff x \geqslant r$ ou $x \leqslant -r$

Démonstration de la proposition n° 10 :

1. $|-x| = \max(-x, x) = \max(x, -x) = |x|$
2. En distinguant les cas :
   - Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $|xy| = xy = |x||y|$.
   - Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$ et $|xy| = -xy = |x||y|$.
   - Si $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$ et $|xy| = -xy = |x||y|$.
   - Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$ et $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.
3. En calculant le carré de $|x + y|^2$:
$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x| \times |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$
Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
4. $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$ donc $|x| - |y| \leqslant |x - y|$, de même $|y| = |y - x + x| \leqslant |y - x| + |x|$, donc $|y| - |x| \leqslant |y - x| = |x - y|$. Ainsi, $||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leqslant |x - y|$.
5. Supposons $|x| \leqslant r$, alors si $x \geqslant 0$, on a $-r \leqslant 0 \leqslant x = |x| \leqslant r$ donc $-r \leqslant x \leqslant r$, si $x \leqslant 0$, $|x| = -x \leqslant r$ donc $-r \leqslant x \leqslant 0 \leqslant r$ donc $-r \leqslant x \leqslant r$. Réciproquement si $-r \leqslant x \leqslant r$, alors si $x \geqslant 0$, $|x| = x \leqslant r$ et si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x \leqslant r$
6. Supposons $|x| < r$, alors si $x \geqslant 0$, on a $-r < 0 \leqslant x = |x| < r$ donc $-r < x < r$, si $x \leqslant 0$, $|x| = -x < r$ donc $-r < x \leqslant 0 < r$ donc $-r < x < r$. Réciproquement si $-r < x < r$, alors si $x \geqslant 0$, $|x| = x < r$ et si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x < r$
7. Supposons $|x| = r$, alors si $x \geqslant 0$, on a $x = |x| = r$ donc $x = r$, si $x \leqslant 0$, $x = -|x| = -r$ donc donc $x = -r$, ainsi $x = \pm r$. Réciproquement si $x = \pm r$, alors si $x \geqslant 0$, alors par parité de la valeur absolue, $|x| = r$.
8. On a prouvé au point 6., que
$$|x| < r \quad \iff \quad (-r < x \quad \text{et} \quad x < r)$$
Par contraposée, d'une équivalence, on obtient $|x| \geqslant r$ ssi $x \leqslant -r$ ou $x \geqslant r$. ■

Remarque 16. La fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Justification de la remarque 16 : Posons, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \ln(|x|)$, alors, on sait déjà que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, si $x < 0$, alors, $f(x) = \ln(-x)$. Or, $\begin{cases} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto -x \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x) = (-1) \times \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$. Ainsi, f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.5 Fonctions trigonométriques

Définition des fonctions cosinus et sinus

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note M le point du cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit x. On note $\cos(x)$ l'abscisse de M et $\sin(x)$ son ordonnée. On a donc défini deux fonctions $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1\,;1]$ et $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1\,;1]$.

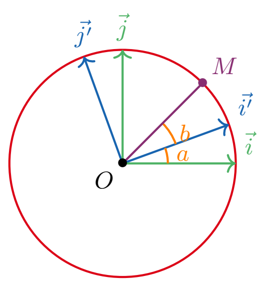
Remarques 17.
- Si $x = y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors ils définissent le même point M sur le cercle trigonométrique. On note alors $x \equiv y\ [2\pi]$.
- Il faut savoir retrouver les cosinus et sinus de $x \pm \pi$ et $\pi/2 \pm x$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $\cos(a) = \cos(b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = -a + 2k\pi$ et $\sin(a) = \sin(b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = \pi - a + 2k\pi$

Proposition n° 11 : propriétés des fonctions cosinus et sinus

1. sin est impaire, 2π-périodique
2. cos est paire, 2π-périodique,
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
4. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
5. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
6. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
7. sin dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$.
8. cos dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\cos' = -\sin$.
9. $\sin^2(a) + \cos(a)^2 = 1$
10. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
11. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
12. $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
13. $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.
14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Démonstration de la proposition n° 11 :

1. Si $x \in \mathbb{R}$, notons M (resp. N) le point du cercle trigonométrique dont un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit égal à x (resp. $-x$), alors M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. En particulier, leurs ordonnées sont opposées ainsi, $\sin(-x) = -\sin(x)$. De plus, notons P le point du point du cercle trigonométrique dont un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit égal à $x + 2\pi$, alors $P = M$ et ils ont la même ordonnées, donc $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Dès lors, sin est impaire et 2π-périodique.
2. En reprenant le travail fait au point précédent, les abscisses de M et N sont égales, donc $\cos(-x) = \cos(x)$, et les abscisses de M et P sont aussi égales, donc $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, dès lors, cos est paire et 2π-périodique.
3. Notons M le point du cercle trigonométrique tel qu'un angle entre $\vec{i}$ et $O\vec{M}$ soit $a+b$, posons $\vec{i'}$ le vecteur dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit $(\cos(a), \sin(a))$ et $\vec{j'}$ le vecteur dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit $(-\sin(a), \cos(a))$.



Remarquons que $(O, \vec{i'}, \vec{j'})$ est un repère. alors, comme l'angle entre OM et $\vec{i'}$ est b, les coordonnées de M dans $(O, \vec{i'}, \vec{j'})$ sont $(\cos(b), \sin(b))$, ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\vec{i'} + \sin(b)\vec{j'} = \cos(b)\left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}\right) + \sin(b)\left(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}\right)\\ &= (\cos(a\cos(b) - \sin(a)\sin(b))) + (\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\end{aligned}$$

Or, l'ordonnée de ce point est aussi $\sin(a+b)$, ainsi, par unicité de l'ordonnée : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

4. En prenant le travail fait au point précédent, par unicité de l'abscisse, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
5. En utilisant la parité du cos et l'imparité du sin, il vient :

$$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

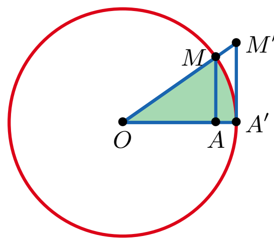
6. En utilisant la parité du cos et l'imparité du sin, il vient :

$$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

7. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)}{h} - \frac{\sin(a)}{h} = \sin(a) \times \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a) \times \frac{\sin(h)}{h}$$

On a donc besoin d'étudier la limite de $\dfrac{\sin(h)}{h}$ et de $\dfrac{\cos(h)-1}{h}$ quand $h \to 0$. Pour cela, faisons une petite étude géométrique. Soit $h \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$. Soit M le point du cercle trigonométrique telle que l'angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ vaille h :



Remarquons que par le théorème de Thales : $\dfrac{MA}{M'A} = \dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{\cos(h)}{1}$, ainsi, $MA' = \dfrac{\sin(h)}{\cos(h)}$, de plus :

- L'aire du triangle OAM vaut $\dfrac{OA \times MA}{2} = \dfrac{\cos(h)\sin(h)}{2}$
- L'aire du triangle $OA'M'$ vaut $\dfrac{OA' \times M'A'}{2} = \dfrac{1 \times \frac{\sin(h)}{\cos(h)}}{2} = \dfrac{\sin(h)}{2\cos(h)}$.
- L'aire de la surface verte vaut $\pi \times \dfrac{h}{2\pi} = \dfrac{h}{2}$

Comme le triangle OMA est inclus dans cette surface verte elle-même incluse dans le triangle $OA'M'$, on en déduit l'inégalité entre les aires : $\dfrac{\cos(h)\sin(h)}{2} \leqslant \dfrac{h}{2} \leqslant \dfrac{\sin(h)}{2\cos(h)}$. En divisant par $\sin(h) > 0$, on obtient $\dfrac{\cos(h)}{} \leqslant \dfrac{h}{\sin(h)} \leqslant \dfrac{1}{\cos(h)}$, en passant à l'inverse, $\cos(h) \leqslant \dfrac{\sin(h)}{h} \leqslant \dfrac{1}{\cos(h)}$, par le théorème d'encadrement, il vient $\dfrac{\sin(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$, par parité de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$, on obtient $\dfrac{\sin(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. De plus,

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{(\cos(h)-1)(\cos(h)+1)}{h(\cos(h)+1)} = \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)} = \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{-\sin(h)}{\cos(h)+1} \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \times \frac{-0}{2} = 0$$

En revenant à l'étude du taux d'accroissements, on peut donc en conclure que

$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \sin(a) \times 0 + \cos(a) \times 1 = \cos(a)$$

Ceci montre que sin est dérivable en a et que $\sin'(a) = \cos(a)$. Comme ceci est fait pour tout $a \in \mathbb{R}$, on en conclut que sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$.

8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, en reprenant le travail fait au point précédent :

$$\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\sin(a)$$

Ceci montre que cos est dérivable en a et que $\cos'(a) = -\sin(a)$. Comme ceci est fait pour tout $a \in \mathbb{R}$, on en conclut que cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\cos' = -\sin$.

9. Notons M le point de coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$ et A le point de coordonnées $(\cos(a), 0)$, alors le triangle AMO est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $OM^2 = OA^2 + AM^2$ soit $1 = \cos^2(a) + \sin^2(a)$.
10. $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1-\cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$.
11. $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = 2\sin(a)\cos(a)$
12. Comme $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, on a $2\cos^2(a) = 1 + \cos(2a)$ soit $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
13. $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = 1 - \dfrac{1+\cos(2a)}{2} = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

14. Posons $g\colon x \mapsto x - \sin(x)$ et $h\colon x \mapsto x + \sin(x)$. Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = 1 - \cos(x) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad h'(x) = 1 + \cos(x) \geqslant 0$$
Ainsi, g est décroissante et h est croissante. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $g(x) \leqslant g(0) = 0$ et $h(x) \geqslant h(0) = 0$, ainsi, $x - \sin(x) \leqslant 0$ et $x + \sin(x) \geqslant 0$, donc $\sin(x) \leqslant x$ et $\sin(x) \geqslant -x$, dès lors, $-x \leqslant \sin(x) \leqslant x$, on peut en déduire que $|\sin(x)| \leqslant x = |x|$. Pour $x \leqslant 0$, on peut appliquer ce qui précède à $-x \geqslant 0$ et on obtient $|\sin(x)| = |\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|$ ■

Remarque 18. Grâce à ces formules, on peut trouver une formule de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ etc.

Définition de la fonction tangente

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) \neq 0$, on pose $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ceci définit la fonction **tangente**.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Table 2 – Tableau des valeurs usuelles des fonctions trigonométriques à connaître.

Proposition n° 12 : propriétés de la fonction tangente

1. La fonction tan est impaire, π-périodique, dérivable sur $D_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et pour tout $x \in D_{\tan}$: $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
2. Si $(a, b, a+b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, si $(a, b, a-b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

2.6 Fonctions trigonométrique réciproques

Remarque 19. Les fonctions cos et sin ne sont pas des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ni tan de $D_{\tan}$ vers $\mathbb{R}$.

Proposition n° 13 : bijectivité des fonctions trigonométriques sur des «bons» intervalles

$$c\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}, \; s\colon \begin{cases} \left[\,-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right] \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases} \text{ et } t\colon \begin{cases} \left]\,-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases} \text{ sont bijectives.}$$

Démonstration de la proposition n° 13 :

1. La fonction c est dérivable sur $[\,0\,;\pi\,]$ et pour tout $x \in [\,0\,;\pi\,]$, $c'(x) = -\sin(x) \leqslant 0$. De plus, pour $x \in [\,0\,;\pi\,]$, $c'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \pi$. Ainsi, c' est une fonction négative et c' ne s'annule que deux fois sur $[\,0\,;\pi\,]$. D'après le théorème n° 3 de la caractérisation des fonctions strictement monotones, c est strictement décroissante sur $[\,0\,;\pi\,]$. De plus, elle est continue (car dérivable) sur $[\,0\,;\pi\,]$. D'après le théorème n° 1 de la bijection strictement monotone, c est une bijection de $[\,0\,;\pi\,]$ vers $[\,c(\pi)\,;c(0)\,] = [\,-1\,;1\,]$.
2. La fonction s est dérivable sur $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$ et pour tout $x \in [\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$, $s'(x) = \cos(x) \geqslant 0$. De plus, pour $x \in [\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$, $s'(x) = 0$ si et seulement si $x = \pm\pi/2$. Ainsi, s' est une fonction positive et s' ne s'annule que deux fois sur $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$. D'après le théorème n° 3, s est strictement croissante sur $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$. De plus, elle est continue (car dérivable) sur $[\,0\,;\pi\,]$. D'après le théorème n° 1 de la bijection strictement monotone, s est une bijection de $[\,0\,;\pi\,]$ vers $[\,s(-\pi/2)\,;s(\pi/2)\,] = [\,-1\,;1\,]$.

3. La fonction t est dérivable sur $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ et pour tout $x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, $t'(x) = 1+\tan^2(x) > 0$, donc, d'après le théorème n° 3, t est strictement croissante sur $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$. De plus, t est continue sur $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ (car dérivable) D'après le théorème n° 1 de la bijection strictement monotone, t est une bijection de $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ vers

$$\left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} t(x)\,;\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} t(x)\right[= \mathbb{R}$$ ■

Définition des fonctions trigonométriques réciproques

- La bijection réciproque de $c\colon [0\,;\pi] \to [-1\,;1]$ est appelée **arccos**: $[-1\,;1] \to [0\,;\pi]$.
- La bijection réciproque de $s\colon \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \to [-1\,;1]$ est appelée **arcsin**: $[-1\,;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
- La bijection réciproque de $t\colon \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est appelée **arctan**: $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

Remarques 20.
- D'autres intervalles auraient pu être considérés, si $k \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \cos(x)$ réalise aussi une bijection de $[k\pi\,;k\pi+\pi]$ vers $[-1\,;1]$. Par convention, on a privilégié $[0\,;\pi]$ (un intervalle dans $\mathbb{R}_+$ contenant 0) à $[k\pi\,;k\pi+\pi]$. Pour s et t, on a privilégié des intervalles centrées en 0 car sin et tan sont impaires.
- Pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$ et pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$.
- Pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$ et pour tout $x \in [-\pi/2\,;\pi/2]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ et pour tout $x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

Exemples 11. Calculer $\arctan(1)$, $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\cos(\arccos(0))$, $\arccos(\cos(0))$ et $\arccos(\cos(2\pi))$.

Solution des exemples 11 :
- Comme $\tan(\pi/4) = 1$ et que $\pi/4 \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, $\pi/4$ est l'unique antécédent de 1 dans $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ pour la fonction tangente, ainsi, $\arctan(1) = \pi/4$.
- Comme $\sin(0) = 0$ et que $0 \in [-\pi/2\,;\pi/2]$, 0 est l'unique antécédent de 0 dans $[-\pi/2\,;\pi/2]$ pour la fonction sin, ainsi, $\arcsin(0) = 0$.
- Comme $\sin(\pi/2) = 1$ et que $\pi/2 \in [-\pi/2\,;\pi/2]$, $\pi/2$ est l'unique antécédent de 1 dans $[-\pi/2\,;\pi/2]$ pour la fonction sin, ainsi, $\arcsin(1) = \pi/2$.

Proposition n° 14 : propriétés des fonctions trigonométriques réciproques

1. arccos est continue sur $[-1\,;1]$, dérivable sur $\left]-1\,;1\right[$ et pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. arcsin est impaire, continue sur $[-1\,;1]$, dérivable sur $\left]-1\,;1\right[$, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. arctan est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Démonstration de la proposition n° 14 :

1. Comme c est une fonction strictement décroissante et continue sur $[0\,;\pi]$, d'après le théorème n° 1 de la bijection strictement monotone, $\arccos = c^{-1}$ est strictement décroissante et continue sur $[-1\,;1]$. Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$, par décroissance stricte d'arccos, $\arccos(1) < \arccos(x) < \arccos(-1)$ donc $0 < \arccos(x) < \pi$. De plus, c est une fonction dérivable en $\arccos(x)$ et $c'(\arccos(x)) = -\sin(\arccos(x)) < 0$. D'après le théorème n° 2 de dérivation de la bijection réciproque, arccos est dérivable en x et
$$\arccos'(x) = \frac{1}{c'(c^{-1}(x))} = \frac{1}{c'(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
2. Comme s est une fonction strictement croissante et continue sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$, d'après le théorème n° 1 de la bijection strictement monotone, $\arcsin = s^{-1}$ est strictement croissante et continue sur $[-1\,;1]$.
Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$, alors $-1 < x < 1$ comme arcsin est strictement croissante sur $[-1\,;1]$, $\arcsin(-1) < \arcsin(x) < \arcsin(1)$ donc $-\pi/2 < \arcsin(x) < \pi/2$, or s est dérivable en $\arcsin(x)$ et $s'(\arcsin(x)) = \cos(\arcsin(x)) > 0$. D'après le théorème n° 2 de la dérivation de la bijection réciproque, $s^{-1} = \arcsin$ est dérivable en x et
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{s'(s^{-1}(x))} = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \underset{\cos(\arcsin(x))>0}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
Soit $x \in [-1\,;1]$, alors $-x \in [-1\,;1]$. Posons $a = \arcsin(x) \in [-\pi/2\,;\pi/2]$ et $b = \arcsin(-x) \in [-\pi/2\,;\pi/2]$. Alors, $\sin(a) = x$ et $\sin(-b) = -\sin(b) = -(-x) = x$, avec a et b dans $[-\pi/2\,;\pi/2]$. Par bijectivité de la fonction s, on en déduit que $a = -b$. Soit $-\arcsin(-x) = \arcsin(x)$. Ainsi, la fonction arcsin est impaire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors t est une bijection dérivable en $\arctan(x)$ et $t'(\arctan(x)) = 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2 > 0$, alors d'après le théorème n° 2 de dérivation de la bijection réciproque, arctan est dérivable en x et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{t'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$. Posons $a = \arctan(x) \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ et $b = \arctan(-x) \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$. Alors, $\tan(a) = x$ et $\tan(-b) = -\tan(b) = -(-x) = x$, avec a et b dans $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$. Par bijectivité de la fonction t, on en déduit que $a = -b$. Soit $-\arctan(-x) = \arctan(x)$. Ainsi, la fonction arctan est impaire. ■

On peut aussi montrer directement que si $f\colon I \to J$ avec I et J deux intervalles symétriques par par rapport à 0 et f bijective impaire, alors f^{-1} est aussi impaire.

	arccos	arcsin	arctan
Définie sur	$[-1\,;1]$	$[-1\,;1]$	$\mathbb{R}$
Image	$[0\,;\pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$	$\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$
Valeur en 0	$\frac{\pi}{2}$	0	0
Valeur en 1	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
Monotonie	strict. décroissante	strict. croissante	strict. croissante
Parité		impaire	impaire
Continue sur	$[-1\,;1]$	$[-1\,;1]$	$\mathbb{R}$
Dérivable sur	$]-1\,;1[$	$]-1\,;1[$	$\mathbb{R}$
Fonction dérivée	$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

TABLE 3 – Résumé des propriétés des fonctions trigonométriques réciproques

2.7 Fonctions hyperboliques

Remarque 21. Pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on rappelle qu'il existe une unique fonction paire $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = p + i$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

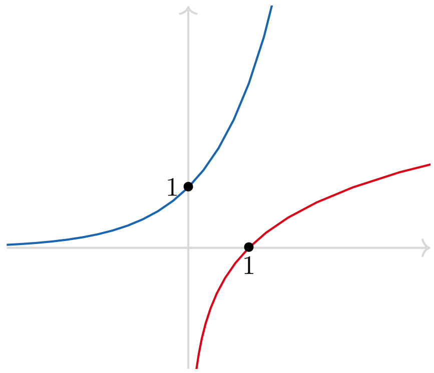
Définition des fonctions cosinus et sinus hyperboliques

On définit le **cosinus hyperbolique** par ch : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \end{cases}$ et le **sinus hyperbolique** par sh : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{cases}$

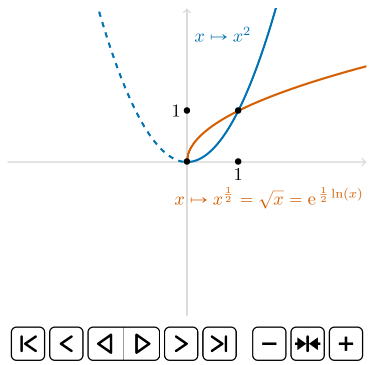
Proposition n° 15 : propriétés des fonctions hyperboliques

1. sh est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
2. ch est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$
3. $\mathrm{sh}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\mathrm{sh}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$
4. $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$
5. sh est croissante sur $\mathbb{R}$
6. ch est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$
7. $\forall x \geqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$, $\forall x \leqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \leqslant 0$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$
9. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

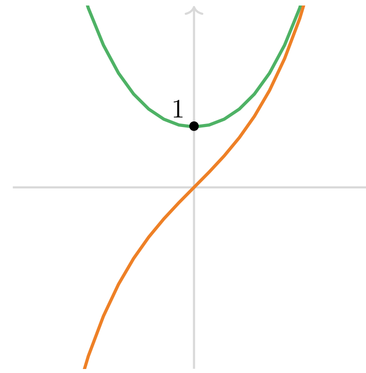
3 Représentation graphique des fonctions usuelles



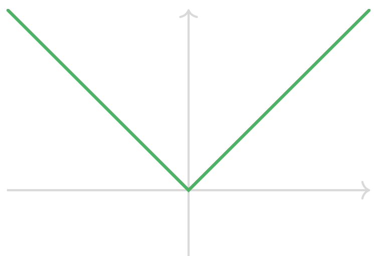
(a) Les fonctions exponentielle et logarithme



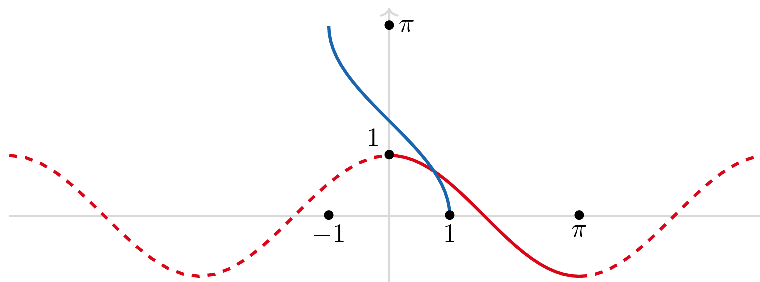
(b) Les fonctions puissances



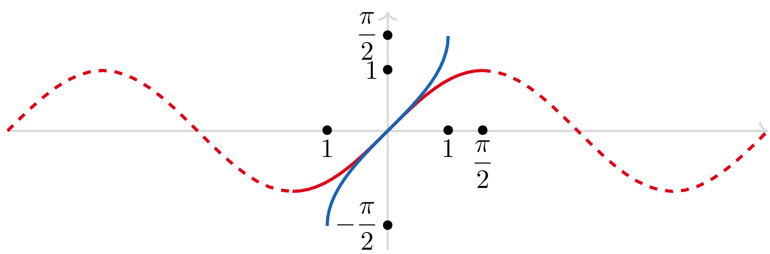
(c) Les fonctions ch et sh



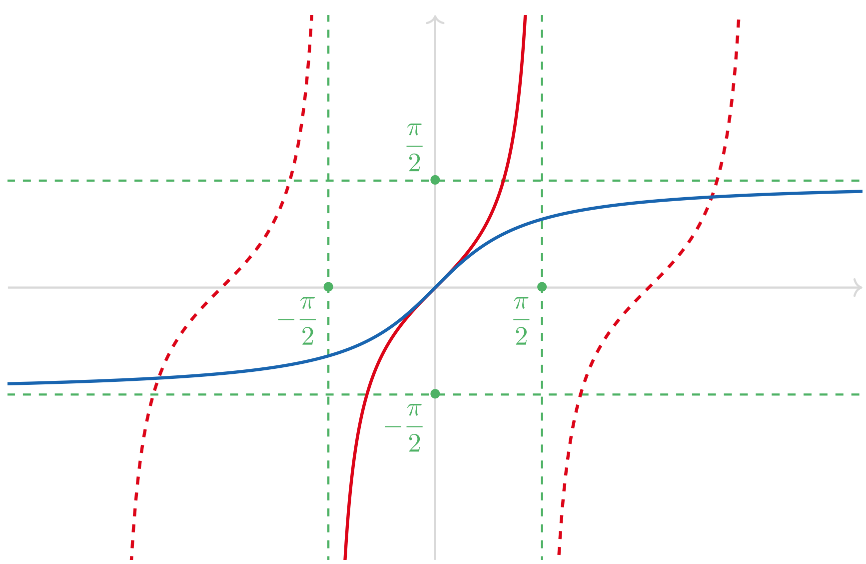
(d) La fonction valeur absolue



(e) La fonction cosinus et la fonction arccos



(f) La fonction sinus et la fonction arcsinus



(g) La fonction tan et la fonction arctan

Figure 3 – Si une fonction est bijective seulement sur une sous-partie de son domaine de définition on l'a tracé en trait plein sur cette sous partie et en pointillé en dehors.