

### Correction de l'exercice 1.

**Correction de l'exercice 2.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , alors  $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ , en développant, par identité remarquable, on a  $|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \geq 0$ , soit  $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ .

**Correction de l'exercice 3.** • On remarque que

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x'})^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{x'} + x' \geq x + x'$$

On applique donc la fonction racine carrée, qui est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , ainsi  $\sqrt{x + x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$ .

• De plus, comme  $x' \geq 0$ ,  $x - x' \leq x + x'$ , par croissance de la racine carrée :

$$\sqrt{x - x'} \leq \sqrt{x + x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$$

Donc  $\sqrt{x - x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$

• En outre,  $\sqrt{x} = \sqrt{(x - x') + x'} \leq \sqrt{x - x'} + \sqrt{x'}$ , ainsi,  $\sqrt{x} - \sqrt{x'} \leq \sqrt{x - x'}$

On a donc bien montré toutes les inégalités demandées.

### Correction de l'exercice 4.

### Correction de l'exercice 5.

**Correction de l'exercice 6.** 1. Remarquons que  $f$  est impaire, en effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-x \in \mathbb{R}$  et  $f(-x) = \sin(-x) \cos^2(-x) = -\sin(x) \cos^2(x)$  (par imparité du sinus et parité du cosinus). Si on étudie  $f$  sur  $[0; \pi]$ , alors par symétrie par rapport à 0, on obtiendra  $f$  sur  $[-\pi; 0]$  et donc sur  $[-\pi; \pi]$ , intervalle de longueur  $2\pi$ . Or  $f$  est  $2\pi$  périodique, en effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) \cos^2(x + 2\pi) = \sin(x) \cos^2(x) = f(x)$ . Ainsi, par translation, on obtiendra le graphe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(\pi - x) = \sin(\pi - x) \cos(\pi - x)^2 = \sin(x)(-\cos(x))^2 = f(x)$ . Ainsi, si on étudie  $f$  sur  $[0; \pi/2]$  par symétrie verticale d'axe  $x = \pi/2$ , on obtient  $f$  sur  $[\pi/2; \pi]$  et donc sur  $[0; \pi]$ .

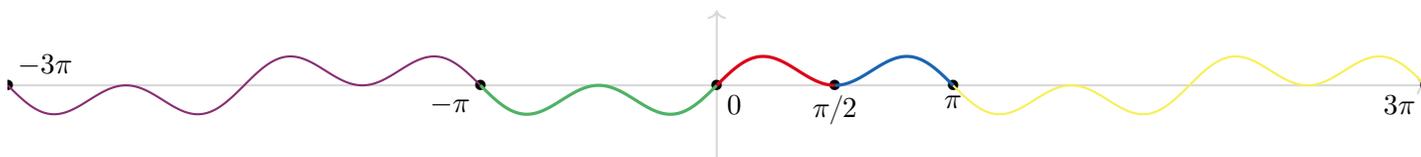


FIGURE 1 – La partie en rouge est la partie étudiée. Par symétrie verticale d'axe  $x = \pi/2$ , on en déduit la partie en bleu. Par symétrie axial, on en déduit la partie en vert. Par translation de  $2\pi$ , on en déduit les parties jaune et violet.

### Correction de l'exercice 7.

**Correction de l'exercice 8.** 1. Posons  $f: x \mapsto e^x \cos(x)$ . Supposons que  $f$  soit majorée. Alors, il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq M$ . Par suite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(2n\pi) \leq M$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e^{2n\pi} \leq M$ . Or  $e^{2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  donc cette suite ne peut pas être bornée. Ceci est donc une contradiction. Ainsi,  $f$  n'est pas majorée. Supposons que  $f$  soit minorée. Alors, il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $m \leq f(x)$ . Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq f(2n\pi + \pi)$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq -e^{2n\pi + \pi}$ , d'où  $e^{2n\pi + \pi} \leq -m$ . Or  $e^{2n\pi + \pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , donc cette suite ne peut pas être bornée. Ceci est donc une contradiction. Ainsi,  $f$  n'est pas minorée.

2. Posons  $g: x \mapsto \frac{-7 \sin(x^2) + 2 \cos(\sin(x))}{1 + e^x}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$|g(x)| = \frac{|-7 \sin(x^2) + 2 \cos(\sin(x))|}{|1 + e^x|} \leq \frac{|7 \sin(x^2)| + |2 \cos(\sin(x))|}{1 + e^x} \leq \frac{7 + 2}{1} = 9$$

Ainsi, la fonction  $g$  est bornée.

3. Posons  $h: x \mapsto (1 + \cos(x)) \ln(1 + x^2)$ , alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $1 + \cos(x) \geq 0$  et  $\ln(1 + x^2) \geq \ln(1) = 0$ , par produit,  $h(x) \geq 0$ . Ainsi,  $h$  est minorée par 0. Supposons que  $h$  soit majorée, alors il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) \leq M$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h(2n\pi) \leq M$ , donc  $2 \ln(1 + 4n^2\pi^2) \leq M$ . Or,  $\ln(1 + 4n^2\pi^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , on a donc une contradiction. Ainsi,  $h$  n'est pas majorée.
4. Posons  $i: x \mapsto x + \frac{42}{x}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $i(x) > 0$ . La fonction  $i$  est minorée par 0. Cependant,  $i(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} +\infty$ , ainsi  $i$  n'est pas majorée.

**Correction de l'exercice 9.** 1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction est définie en  $x$  ssi  $4x - 3 \neq 0$  ssi  $x \neq 3/4$ . Ainsi, l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R} \setminus \{3/4\}$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3/4\}$ . Soit  $y \in \mathbb{R}$ , alors :

$$y = f(x) = \frac{3x - 2}{4x - 3} \iff (4x - 3)y = (3x - 2) \iff x(4y - 3) = 3y - 2$$

Il y a alors deux cas :

- Si  $4y - 3 = 0$ , c'est-à-dire si  $y = 3/4$ , alors  $3y - 2 = 1/4$ , ainsi l'équation, d'inconnue  $x$ ,  $x(4y - 3) = 3y - 2$  n'a pas de solution et donc l'équation  $y = f(x)$  n'a pas de solution
- Si  $4y - 3 \neq 0$ , alors d'après ce qui précède,  $y = f(x)$  ssi  $x = \frac{3y - 2}{4y - 3}$ . De plus, si  $x = \frac{3y - 2}{4y - 3}$ , alors  $x \neq 3/4$  (si  $\frac{3y - 2}{4y - 3} = 3/4$ , alors  $4(3y - 2) = 3(4y - 3)$  et donc  $-8 = -9$  ce qui est impossible)

On a ainsi montré que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R} \setminus \{3/4\}$  vers  $\mathbb{R} \setminus \{3/4\}$ , car pour tout  $y \in \mathbb{R} \setminus \{3/4\}$ , on a trouvé un unique  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3/4\}$  et  $x = \frac{3y - 2}{4y - 3}$ , ainsi  $f^{-1}: y \mapsto \frac{3y - 2}{4y - 3}$ . On remarque que  $f = f^{-1}$ .

**Correction de l'exercice 10.**

**Correction de l'exercice 11.**

**Correction de l'exercice 12.** Soit  $T$  une période de  $f$ , alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x + T) = f(x)$ . En particulier, pour  $x = 0$ ,  $f(T) = f(0) = 1$ , ainsi,  $T \in \mathbb{Q}$ . De plus,  $T > 0$ , ainsi  $T \in \mathbb{Q}_+^*$ . Réciproquement, soit  $T = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^*$

avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Supposons  $x = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$  avec  $(p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , alors  $x + T = \frac{pq' + p'q}{qq'} \in \mathbb{Q}$ .

Si  $x + T = \frac{p''}{q''} \in \mathbb{Q}$  avec  $(p'', q'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , alors

$$x = (x + T) - T = \frac{p''}{q''} - \frac{p}{q} = \frac{p''q - pq''}{qq''} \in \mathbb{Q}$$

Ainsi, on a montré que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{Q}$  ssi  $x + T \in \mathbb{Q}$ , par contraposée, on a aussi  $x \notin \mathbb{Q}$  ssi  $x + T \notin \mathbb{Q}$ . Ainsi, si  $x \in \mathbb{Q}$ , alors  $x + T \in \mathbb{Q}$  et  $f(x) = 1 = f(x + T)$ , si  $x \notin \mathbb{Q}$ , alors  $x + T \notin \mathbb{Q}$  et  $f(x) = 0 = f(x + T)$ , ainsi,  $f$  est périodique de période  $T$ . Ainsi, l'ensemble des périodes de  $f$  est  $\mathbb{Q}_+^*$ . Supposons que  $f$  admette une période fondamentale notée  $T$ , alors  $T \in \mathbb{Q}_+^*$ , remarquons que  $T/2 \in \mathbb{Q}_+^*$ . Comme  $T$  est la plus petite période,  $T/2$  est une période de  $f$ , ainsi  $T \leq T/2$  donc  $1 \leq 1/2$  ce qui est absurde. Par conséquent, on a montré que  $f$  n'admettait pas de période fondamentale.

**Correction de l'exercice 13.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x + 1) \underset{f \text{ 2-périodique}}{=} f((x + 1) + 2) = f(x + 3) \underset{f \text{ 2-périodique}}{=} f((x + 3) + 2) = f(x + 5) \underset{f \text{ 5-périodique}}{=} f(x)$$

Ainsi,  $f$  est 1-périodique.

**Correction de l'exercice 14.**

**Correction de l'exercice 15.** L'application  $x \mapsto x^2 - 1$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . En outre  $\sqrt{\cdot}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , par composée de deux applications strictement croissante,  $f$  est strictement croissante sur  $^1 [1; +\infty[$ .

De plus, par composée de fonctions continues,  $f$  est continue sur  $[1; +\infty[$ . Ainsi,  $f$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  vers  $\left[ f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = [0; +\infty[$ . Soit  $y \in [0; +\infty[$ , alors il existe un unique  $x \in [1; +\infty[$  tel que  $y = f(x)$ , ainsi  $y^2 = x^2 - 1$ , donc  $x^2 = y^2 + 1$  donc  $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2 + 1}$ . Or  $x \geq 0$  donc  $\sqrt{x^2} = x$ . Dès lors,  $x = \sqrt{y^2 + 1}$ , Par conséquent <sup>2</sup>,  $f^{-1} \begin{cases} [0; +\infty[ \longrightarrow [1; +\infty[ \\ y \longmapsto \sqrt{y^2 + 1} \end{cases}$ .

**Correction de l'exercice 16.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \neq a$ , en divisant par  $|x - a|$ , on a  $\frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq \frac{3}{2}|x - a|^{\frac{3}{2}}$ , soit

$$-\frac{3}{2}|x - a|^{\frac{3}{2}} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{3}{2}|x - a|^{\frac{3}{2}}$$

Comme  $\frac{3}{2}|x - a|^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ , par théorème d'encadrement,  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ . Dès lors,  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = 0$ . Et ce pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Ainsi,  $f$  est constante sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ .

**Correction de l'exercice 17.**

**Correction de l'exercice 18.** 1. Remarquons que  $x \mapsto x + \lambda$  et  $x \mapsto x^2 + 1$  sont toutes les deux dérivables sur  $\mathbb{R}$  et que  $x^2 + 1 \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi, par quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - 2x(x + \lambda)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x\lambda + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Ainsi, l'équation de la tangente de  $f_\lambda$  en 0 est  $x \mapsto f(0) + f'(0)(x - 0) = \lambda + x$ . Donc, les tangentes aux courbes de  $f_\lambda$  en  $x = 0$  sont parallèles (car ont toutes le même coefficient directeur).

2. En revanche, l'équation de la tangente de  $f_\lambda$  en 1 est

$$T_\lambda: x \mapsto f(1) + f'(1)(x - 1) = \frac{1 + \lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}(x - 1) = 1 + \lambda - \frac{\lambda}{2}x$$

On remarque alors que  $T_\lambda(2) = 1$ . Ainsi, toutes les tangentes de  $f_\lambda$  en 1 sont concourantes au point  $(2, 1)$ .

**Correction de l'exercice 19.** Pour tout  $x > 0$

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\iff e^{\sqrt{x} \ln(x)} = e^{x \ln(\sqrt{x})} &\iff \sqrt{x} \ln(x) = \frac{x}{2} \ln(x) \\ &\iff \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) \ln(x) = 0 &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} &\iff_{x \geq 0} \ln(x) = 0 \text{ ou } x = \frac{x^2}{4} \\ &\iff_{x \neq 0} x = 1 \text{ ou } 1 = \frac{x}{4} &\iff x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

La deuxième équivalence est justifiée par le fait qu'on puisse passer une égalité par la fonction exponentielle ou la fonction logarithme.

**Correction de l'exercice 20.**

**Correction de l'exercice 21.**

1. Dériver  $f$  serait une mauvaise idée, dans la mesure où la racine carrée n'est pas dérivable en 0, on ne peut dériver  $f$  en 1 par la formule de dérivée de la composée.

2. Ou bien  $f^{-1} \begin{cases} [0; +\infty[ \longrightarrow [1; +\infty[ \\ x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$ , si on n'aime pas les fonctions dont  $y$  est la variable (muette).

## Correction de l'exercice 22.

**Correction de l'exercice 23.** 1. sh est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x) > 0$ , ainsi la fonction sh est strictement croissante. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) \right[ = ] -\infty; +\infty [ = \mathbb{R}$ .

2. ch est dérivable sur  $]0; +\infty [$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x) \geq 0$  et  $\text{sh}(x) = 0$  ssi  $x = 0$ , donc la dérivée de ch est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$  sauf en 0, ainsi ch est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme ch est aussi continue, ch réalise<sup>3</sup> une bijection de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\left[ \text{ch}(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) \right[ = [1; +\infty [$ .

3. La fonction th est le quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , ainsi, th est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{sh}'(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\text{ch}'(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$$

Ainsi, la fonction th est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$$

Comme th est continue sur  $\mathbb{R}$  et strictement croissante, th est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) \right[ = ] -\infty; +\infty [ = \mathbb{R}$ .

4. • Soit  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $a = \text{argsh}(x) \in \mathbb{R}$ . Notons que sh est dérivable en  $a$  et  $\text{sh}'(a) = \text{ch}(a) \neq 0$ . Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité d'une bijection réciproque, argsh est dérivable en  $x$  et

$$\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(a)} = \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh}(x))}$$

Or,  $\text{ch}(\text{argsh}(x))^2 - \text{sh}(\text{argsh}(x))^2 = 1$ . Donc  $\text{ch}^2(\text{argsh}(x)) = 1 + x^2$ , ainsi  $\text{ch}(\text{argsh}(x)) = \pm\sqrt{1+x^2}$ , or  $\text{ch}(\text{argsh}(x)) > 0$ . Dès lors,  $\text{ch}(\text{argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$ , ainsi  $(\text{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ . Ainsi, la fonction

argsh est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\text{argsh}' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

• Soit  $x \in ]1; +\infty [$ , posons  $a = \text{argch}(x) \in \mathbb{R}_+$ . Si  $a = 0$ , alors  $\text{ch}(a) = x = 1$  ce qui est exclu ici. Ainsi,  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Notons que ch est dérivable en  $a$  et  $\text{ch}'(a) = \text{sh}(a) > 0$ . Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité d'une bijection réciproque, argch est dérivable en  $x$  et

$$\text{argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(a)} = \frac{1}{\text{sh}(\text{argch}(x))}$$

Or,  $\text{ch}(\text{argch}(x))^2 - \text{sh}(\text{argch}(x))^2 = 1$ . Donc  $\text{sh}^2(\text{argch}(x)) = x^2 - 1$ , ainsi  $\text{sh}(\text{argch}(x)) = \pm\sqrt{x^2-1}$ , or  $\text{sh}(\text{argch}(x)) > 0$ . Dès lors,  $\text{sh}(\text{argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$ , ainsi  $\text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ . Ainsi, la fonction

argch est dérivable sur<sup>4</sup>  $]1; +\infty [$  et  $\text{argch}' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ .

• Soit  $x \in ]-1; 1 [$ , posons  $a = \text{argth}(x) \in \mathbb{R}$ . Notons que th est dérivable en  $a$  et  $\text{th}'(a) = 1 - \text{th}^2(a) > 0$ . Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité d'une bijection réciproque, argth est dérivable en  $x$  et

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{\text{th}'(a)} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{argth}(x))} = \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Ainsi, la fonction argth est dérivable sur  $] -1; 1 [$  et  $\text{argth}' : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

3. On remarque que comme ch est paire, ch ne peut pas être une bijection dont l'ensemble de départ est  $\mathbb{R}$ , en effet, comme  $\text{ch}(1) = \text{ch}(-1)$ , 1 et  $-1$  sont deux antécédents de  $\text{ch}(1)$ . Par contre, ch réalise aussi une bijection de  $\mathbb{R}_-$  vers  $]1; +\infty [$  et on aurait pu faire tout l'exercice avec  $\mathbb{R}_-$  à la place de  $\mathbb{R}_+$ .

4. La fonction argch ne peut pas être dérivable en 1, car si  $x = 1$ ,  $a = \text{argch}(1) = 0$  et ch admet une tangente horizontale en 0, par symétrie argch admet une tangente verticale en 1.

5. • Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $y = \operatorname{argsh}(x)$ , alors  $e^y = \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)$ , soit  $e^y = \operatorname{ch}(y) + x$  et

$$\operatorname{ch}(y) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(y)} = \sqrt{1 + x^2}$$

Ainsi,  $e^y = \sqrt{1 + x^2} + x$ , dès lors  $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ . Dès lors  $\operatorname{argsh}: x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ .

- Soit  $x \in [1; +\infty[$ , on note  $y = \operatorname{argch}(x)$ , alors  $e^y = \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)$  soit  $e^y = x + \operatorname{sh}(y)$  avec

$$\operatorname{sh}(y) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(y) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

Ainsi,  $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ , dès lors  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ . Dès lors  $\operatorname{argch}: x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

- Soit  $x \in ]-1; 1[$ , on note  $y = \operatorname{argth}(x)$ , alors

$$e^{2y} = \frac{e^y}{e^{-y}} = \frac{\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)}{\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(y)} = \frac{1 + \operatorname{th}(y)}{1 - \operatorname{th}(y)} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

ainsi  $y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ . Dès lors,  $\operatorname{argth}: x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ .

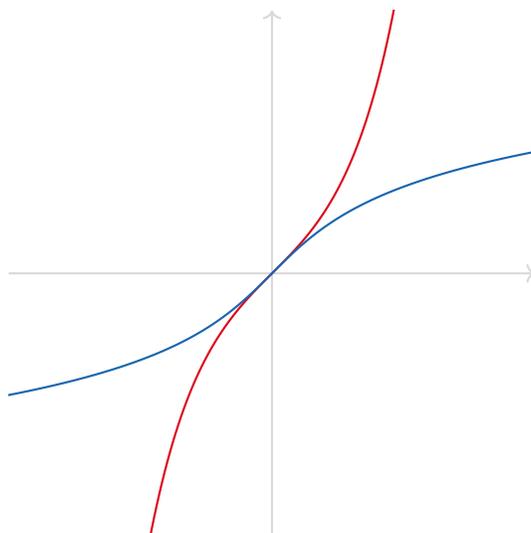


FIGURE 2 – En rouge, la fonction  $\operatorname{sh}$  et en bleu, sa bijection réciproque.

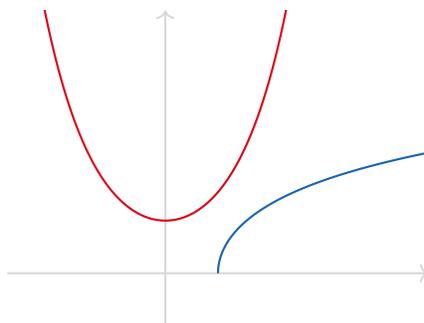


FIGURE 3 – En rouge, la fonction  $\operatorname{ch}$ , non bijective et en bleu, la bijection réciproque de  $\operatorname{ch}$  restreinte à  $\mathbb{R}_+$ .

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26.

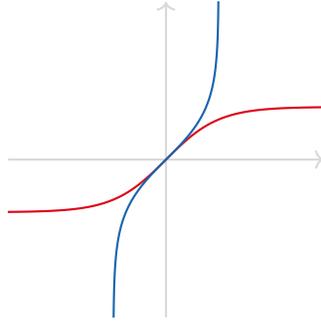


FIGURE 4 – En rouge, la fonction th et en bleu, sa bijection réciproque.

**Correction de l'exercice 27.**

**Correction de l'exercice 28.**

**Correction de l'exercice 29.** Calculons la tangente du membre de droite :

$$\tan(\arctan(1/2) + \arctan(1/3)) = \frac{\tan(\arctan(1/2)) + \tan(\arctan(1/3))}{1 - \tan(\arctan(1/2))\tan(\arctan(1/3))} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 = \tan(\pi/4)$$

Attention, à ne pas aller trop vite, ce n'est pas parce que  $\tan(a) = \tan(b)$  que nécessairement  $a = b$ . Ici, comme  $0 \leq 1/2 < 1$  et que arctan est strictement croissante,  $\arctan(0) \leq \arctan(1/2) < \arctan(1)$ , ainsi  $0 \leq \arctan(1/2) < \pi/4$ . De même,  $0 \leq \arctan(1/3) < \pi/4$ . Par somme  $0 \leq \arctan(1/2) + \arctan(1/3) < \pi/2$ . Ainsi, comme

$$\tan(\arctan(1/2) + \arctan(1/3)) = \tan(\pi/4)$$

On peut appliquer arctan et la relation  $\arctan(\tan(x)) = x$  valable seulement pour  $x \in ]-\pi/2; \pi/2[$ , ainsi

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \pi/4$$

**Correction de l'exercice 30.**

**Correction de l'exercice 31.**

**Correction de l'exercice 32.**

**Correction de l'exercice 33.** 1. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^a e^b + e^a e^{-b} + e^{-a} e^b + e^{-a} e^{-b} + e^a e^b - e^a e^{-b} - e^{-a} e^b + e^{-a} e^{-b}}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} + 2e^{-a-b}}{4} = \operatorname{ch}(a+b) \end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^n = (e^x)^n = e^{nx} = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$ .