Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/6mwftyUHhHk

Correction de l'exercice 4.

1. Partons de $I_{p+1,q-1}=\displaystyle\int_a^b (t-a)^{p+1}\times(b-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$. Posons $u\colon t\mapsto(t-a)^{p+1}$, La fonction u est $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,]$ et $u'\colon t\mapsto(p+1)(t-a)^p$. Posons $v\colon t\mapsto\dfrac{-1}{q}(b-t)^q$, la fonction v est $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,]$ et $v'\colon t\mapsto(b-t)^{q-1}$, ainsi par intégration par parties :

$$I_{p+1,q-1}=\left[(t-a)^{p+1}\frac{-1}{q}(b-t)^q\right]_a^b-\int_a^b(p+1)(t-a)^p\times\frac{-1}{q}(b-t)^q\,\mathrm{d}t=\frac{p+1}{q}\times I_{p,q}$$

2. Ainsi, $I_{p,q}=\dfrac{q}{p+1}\times I_{p+1,q-1}$ En appliquant cette relation, non pas à $I_{p,q}$ mais à $I_{p+1,q-1}$, on obtient $I_{p+1,q-1}=\dfrac{q-1}{p+2}\times I_{p+2,q-2}$ soit $I_{p,q}=\dfrac{q}{p+1}\times\dfrac{q-1}{p+2}\times I_{p+2,q-2}$. En réitérant, encore, on trouve

$$I_{p,q}=\frac{q}{p+1}\frac{q-1}{p+2}\frac{q-2}{p+3}I_{p+3,q-3}$$

En continuant jusqu'à $q=0$, on obtient :

$$I_{p,q}=\frac{q(q-1)(q-2)\dots1}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+q)}I_{p+q,0}$$

En multipliant par $p!$ en haut et en bas, ceci se simplifie en

$$\begin{aligned}I_{p,q}&=\frac{q!p!}{(p+q)!}I_{p+q,0}=\frac{p!q!}{(p+q)!}\int_a^b(t-a)^{p+q}\,\mathrm{d}t=\frac{p!q!}{(p+q)!}\left[\frac{1}{p+q+1}(t-a)^{p+q+1}\right]_a^b\\&=\frac{p!q!}{(p+q)!}\frac{(b-a)^{p+q+1}}{(p+q+1)}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}\end{aligned}$$

Le problème, c'est que l'on a pas été très rigoureux en affirmant l'égalité avec les «...». Pour justifier, on va donc faire une récurrence en posant l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(q)$: «pour tout $p\in\mathbb{N}$, $I_{p,q}=\dfrac{p!q!}{(p+q+1)}(b-a)^{p+q+1}$».

- Si $q=0$, alors pour tout $p\in\mathbb{N}$, $I_{p,0}=\displaystyle\int_a^b(t-a)^p\,\mathrm{d}t=\left[\frac{(t-a)^{p+1}}{p+1}\right]_a^b=\frac{(b-a)^{p+1}}{p+1}$, tandis que $\dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}=\dfrac{p!}{(p+1)!}(b-a)^{p+q+1}=\dfrac{1}{p+1}(b-a)^{p+1}$. Ainsi, $\mathscr{P}(q)$ est vraie.
- Soit $q\in\mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(q)$ vraie. Soit $p\in\mathbb{N}$,

$$I_{p,q+1}=\frac{q+1}{p+1}\times I_{p+1,q}=\frac{q+1}{p+1}\times\frac{q!(p+1)!}{(p+2+q)!}(b-a)^{p+q+2}=\frac{(q+1)!p!}{(p+q+2)!}(b-a)^{p+q+2}$$

  Et ce, pour tout $p\in\mathbb{N}$, donc $\mathscr{P}(q+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout $q\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(q)$ est vraie. Ainsi, pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$,

$$I_{p,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}$$

Correction de l'exercice 5. Notons, pour $x\in\mathbb{R}$, $\phi(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}f(t)\,\mathrm{d}t$ La fonction f est continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet au moins une primitive. Notons F une primitive de f. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\phi(x)=F(x^3)-F(x^2)$. Or F est dérivable (car est une primitive de f) ainsi que $x\mapsto x^3$ et $x\mapsto x^2$. Par composée, $x\mapsto F(x^3)$ et $x\mapsto F(x^2)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, par différence, ϕ l'est également. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\phi'(x)=3x^2F'(x^3)-2xF'(x^2)=3x^2f(x^3)-2xf(x)$.

Correction de l'exercice 6. Posons, comme f est continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet une primitive notée F. Ainsi, F est dérivable et $F' = f$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} F'(0) = f(0)$$

Correction de l'exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme l'application $\ln^n$ est strictement croissante sur $[\,1\,;2\,]$, pour $x \in [\,1\,;2\,]$, $\ln^n(1) \leqslant \ln^n(x) \leqslant \ln^n(2)$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_1^2 0\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int_1^2 \ln^n(2)\,\mathrm{d}x = \ln^n(2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(en effet $0 < \ln(2) < 1$). D'après le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $-1 \leqslant \sin(\cos(\sqrt{x})) \leqslant 1$. En multipliant par $x^n \geqslant 0$, on $-x^n \leqslant x^n\sin(\cos(\sqrt{x})) \leqslant x^n$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 -x^n\,\mathrm{d}x \leqslant v_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. D'après le théorème d'encadrement, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3. La fonction $f\colon t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive, soit F une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$. Ainsi,

$$W_n = n\left(F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0)\right) = \frac{F\left(\frac{1}{n}\right)-F(0)}{\frac{1}{n}-0} \xrightarrow[n\to\infty]{} F'(0) = f(0) = 1$$

Correction de l'exercice 8.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$. Ainsi, $(u_n)_n$ est strictement croissante.

2. Procédons par récurrence. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$\mathrm{e} = u_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$».
   - Pour $n = 0$,
   $$u_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = u_0 + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{0!} + \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1 + (\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}$$
   Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Posons alors $u\colon t \mapsto \dfrac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v\colon t \mapsto \mathrm{e}^t$. Ainsi, u et v sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$, en intégrant par parties, on obtient :
   $$\begin{aligned}\mathrm{e} &= u_n + \int_0^1 \underbrace{\frac{(1-t)^n}{n!}}_{u'(t)}\underbrace{\mathrm{e}^t}_{v(t)}\,\mathrm{d}t = u_n + \left[\underbrace{\frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(t)}\underbrace{\mathrm{e}^t}_{v(t)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(t)}\underbrace{\mathrm{e}^t}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= u_n + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= u_{n+1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
   Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e} = u_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - $u_n < u_{n+1}$ car $(u_n)_n$ est strictement croissante.
   - Comme $e - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Or, $t \mapsto \dfrac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t$ est une fonction positive sur $[\,0\,;1\,]$, par croissance de l'intégrale, $e - u_{n+1} \geqslant 0$, ainsi $u_{n+1} \leqslant e$.
   - Pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$, $\dfrac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t \leqslant \dfrac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}$, par croissance de l'intégrale,

   $$\mathrm{e} - u_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t dt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$$

   Ainsi, $\mathrm{e} \leqslant u_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$.

   On a donc bien $u_n < u_{n+1} \leqslant \mathrm{e} \leqslant u_n + \dfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$
4. En utilisant l'inégalité de la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$. Comme $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}$ D'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}$.
5. Comme $u_n < \dfrac{p}{q} \leqslant u_n + \dfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$, multiplions par $n!$, on obtient $n!u_n < n!\dfrac{p}{q} \leqslant n!u_n + \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$. Or comme $n > \mathrm{e}$, $\dfrac{\mathrm{e}}{n+1} < 1$. Ainsi, $n!u_n < n!\dfrac{p}{q} < n!u_n + 1$. De plus, $n!u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est un entier. Comme $n \geqslant q$, $n!\dfrac{p}{q}$ est un entier compris strictement entre deux entiers consécutifs. On obtient donc une contradiction. En conclusion, e est un nombre irrationnel.

Correction de l'exercice 9.

1. Soit $n \geqslant 1$.

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n+1}x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Posons alors $u\colon x \mapsto x^{n+1}$ et $v\colon x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$, $u'\colon x \mapsto (n+1)x^n$ et $v\colon x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ ainsi par intégration par parties :

$$= \frac{\mathrm{e}}{2} - (n+1)I_n$$

2. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse :** soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$. Posons $b = f(0) + f(1)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = b$. Ainsi, f est solution d'une équation différentielle linéaire du première ordre. L'équation homogène est $f'(x) + f(x) = 0$ dont les solutions sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. De plus, on remarque que $x \mapsto b$ est une solution particulière de l'équation, ainsi, $f\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + b$. De plus,

  $$b = f(0) + f(1) = C + b + C\mathrm{e}^{-1} + b$$

  Ainsi, $b = -C(1 + \mathrm{e}^{-1})$. Ceci prouve que $f\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} - C(1 + \mathrm{e}^{-1})$ avec $C \in \mathbb{R}$.

- **Synthèse :** Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} - C(1+\mathrm{e}^{-1})$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) + f(x) = -C\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x} - C(1+\mathrm{e}^{-1}) = -C(1+\mathrm{e}^{-1})$$

Tandis que $f(0) + f(1) = C - C(1+\mathrm{e}^{-1}) + C\mathrm{e}^{-1} - C(1+\mathrm{e}^{-1}) = -C(1+\mathrm{e}^{-1})$

On a donc démontré que les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$ sont les fonctions $f\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} - C(1+\mathrm{e}^{-1})$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13.
- Résolvons l'équation homogène associée : $y' + \dfrac{x}{x+1}y = 0$. Or $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$, ainsi $x \mapsto x - \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$. Les solutions de l'équation homogène sont donc exactement $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x+\ln(1+x)} = C(1+x)\mathrm{e}^{-x}$.
- Posons $f\colon x \mapsto ax+b$, alors $(x+1)f'(x) + xf(x) = a(x+1) + ax^2 + bx = ax^2 + (b+a) + a$. Ainsi, si on prend $a = b = 1$, alors f est une solution particulière.
- Ainsi, les solutions de $(x+1)y' + xy = x^2 + 2x + 1$ sont exactement les fonctions $x \mapsto C(1+x)\mathrm{e}^{-x} + 1 + x$ où $C \in \mathbb{R}$.
- De plus, $2C\mathrm{e}^{-1} + 2 = 1$ ssi $C = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ Ainsi, la solution du problème de Cauchy est la fonction

$$x \mapsto 1 + x - \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{2}(1+x)$$

Correction de l'exercice 14. Procédons par analyse-synthèse :
- **Analyse :** Fixons $x' \in \mathbb{R}$, alors comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+x') = f(x)f(x')$, en dérivant, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x+x') = f'(x)f(x')$$

En particulier, pour $x = 0$, $f'(x') = f'(0)f(x')$. Notons $C = f'(0) \in \mathbb{R}$. Alors, on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = Cf(x)$. La fonction f est alors solution de l'équation différentielle $y' - Cy = 0$, Ainsi, $f\colon x \mapsto K\mathrm{e}^{Cx}$ avec $K \in \mathbb{R}$. De plus, $K = f(0)$. Or en prenant $x = x' = 0$, on a $f(0) = f(0)^2$, ainsi $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Par conséquent, on a montré que si f vérifiait les conditions demandées, nécessairement $f\colon x \mapsto 0$ ou $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{Cx}$.
- **Synthèse :** Si $f\colon x \mapsto 0$, alors f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,x') \in \mathbb{R}^2$, $f(x+x') = 0 = f(x)f(x')$. Si $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{Cx}$ avec $C \in \mathbb{R}$, alors f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+x') = \mathrm{e}^{C(x+x')} = \mathrm{e}^{Cx+Cx'} = \mathrm{e}^{Cx}\mathrm{e}^{Cx'} = f(x)f(x')$$

Ainsi, la synthèse, montre que $f\colon x \mapsto 0$ et $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{Cx}$ avec $C \in \mathbb{R}$ vérifient bien les conditions requises. L'analyse montre que ce sont les seules fonctions.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/4iOOBtD_vVw

Correction de l'exercice 19.
1.
2.
3.
4. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)\mathrm{e}^x$
   - L'équation homogène est $y'' - 2y' + y$ dont l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$. Comme 1 est racine double, les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions $x \mapsto y_H(x) = (C_1x + C_2)\mathrm{e}^x$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

- Cherchons une solution particulière sous la forme $y_P\colon x \mapsto P(x)\mathrm{e}^x$ d'après l'indication. pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll} y_P(x) & = & P(x)\mathrm{e}^x & \qquad y_P'(x) = (P'(x)+P(x))\mathrm{e}^x \\ y_P''(x) & = & \multicolumn{2}{l}{(P''(x)+P'(x))\mathrm{e}^x + (P'(x)+P(x))\mathrm{e}^x = (P''(x)+2P'(x)+P(x))\mathrm{e}^x} \end{array}$$

  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_P''(x) - 2y_P'(x) + y_P(x) = \left[(P''(x)+2P'(x)+P(x)) - 2(P'(x)+P(x)) + P(x)\right]\mathrm{e}^x = P''(x)\mathrm{e}^x$$

  Ainsi, y_P est solution de l'équation si et seulement si $P''(x) = x^2+1$. En intégrant, on constate que l'on peut prendre $x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2$, ainsi $x \mapsto \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de l'équation.
- Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2\right)\mathrm{e}^x$$

  Avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22. 1. On pose $f\colon\ : x \mapsto \mathrm{e}^x$, alors $f'\colon x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $f''\colon x \mapsto \mathrm{e}^x$ et alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1+x)f''(x) - 2f'(x) + (1-x)f(x) = (1+x)\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x = 0$$

Donc $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation homogène associée.

2. Soit $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   On a alors, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$z(x) = y(x)\mathrm{e}^{-x} \qquad y(x) = z(x)\mathrm{e}^x \qquad y'(x) = (z(x)+z'(x))\mathrm{e}^x \qquad y(x) = (z(x)+2z'(x)+z''(x))\mathrm{e}^x$$

   La fonction y est solution de (E) si, et seulement si,

$$\begin{array}{rl} & (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3\mathrm{e}^x \\ \iff & (1+x)(z''+2z'+z)\mathrm{e}^x - 2(z'+z)\mathrm{e}^x + (1-x)z\mathrm{e}^x = (1+x)^3\mathrm{e}^x \\ \iff & (1+x)(z''+2z'+z) - 2(z'+z) + (1-x)z = (1+x)^3 \\ \iff & (1+x)z'' + z'[2(1+x)-2] + z(1+x-2+1-x) = (1+x)^3 \\ \iff & (1+x)z'' + 2xz' = (1+x)^3 \end{array}$$

   Ainsi y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E') : $(1+x)z'' + 2xz' = (1+x)^3$.
3. On pose $Z = z'$, ainsi y est solution de (E) ssi Z est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(1+x)Z' + 2xZ = (1+x)^3$$

   - L'équation homogène : $(1+x)Z' + 2xZ = 0$ que l'on résout sur Sur sur $I = \left]-\infty\,;-1\right[$ ou sur $J = \left]-1\,;+\infty\right[$., l'équation homogène est équivalente à $Z' + \frac{2x}{1+x}Z = 0$ posons alors $a\colon x \mapsto \frac{2x}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x}$. Ainsi $x \mapsto A(x) = 2x - \ln((1+x)^2)$ est une primitive de a sur I et sur J. Donc, les solutions de l'équation homogène (sur I ou J) sont exactement de la forme $y_H\colon x \mapsto C(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

- Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante : $y_P(x) = C(x)(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x}$ où C est dérivable. Alors

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= C'(x)(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x} + C(x)\left[2(1+x)\mathrm{e}^{-2x} - 2(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x}\right] \\ &= C'(x)(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x}C(x)2(1+x)\left[1-(1+x)\right] = C'(x)(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x} - 2x(1+x)C(x)\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_P'(x) + \frac{2x}{1+x}y_P(x) &= C'(x)(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x} - 2x(1+x)C(x)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2x}{1+x}C(x)(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x} \\ &= C'(x)(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Ainsi y_P est une solution particulière ssi pour $C'(x)(1+x)^2\mathrm{e}^{-2x} = (1+x)^2$ Comme on est sur I ou sur J, on peut diviser par $(1+x)^2$, ainsi on cherche C tel que :

$$C'(x) = (1+x)^2\frac{\mathrm{e}^{2x}}{(1+x)^2} = e^{2x}$$

Soit $C(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ convient et $x \mapsto y_P(x) = \frac{(1+x)^2}{2}$ est une solution particulière de l'équation différentielle, on vérifie que non seulement y_P est une solution particulière de (E'') sur I ou sur J mais sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi si Z est solution de l'équation alors il existe deux constantes C et D tels que

$$Z(x) = C(1+x)^2e^{-2x} + \frac{(1+x)^2}{2} \text{ pour x} \in I \text{ et} Z(x) = D(1+x)^2e^{-2x} + \frac{(1+x)^2}{2} \text{ pour x } \in J$$

- Réciproquement, si Z est de cette forme-là, on remarque alors que $Z(x) \xrightarrow[x\to -1]{} 0$, par continuité, on obtient $Z(-1) = 0$. Ainsi, on obtient que $Z(x) = C(1+x)^2e^{-2x} + \frac{(1+x)^2}{2}$ pour $x \geqslant -1$ et $Z(x) = D(1+x)^2e^{-2x} + \frac{(1+x)^2}{2}$ avec $x < -1$ avec C et D deux constantes. On vérifie réciproquement que de tels fonctions sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier et sont solution de l'équation $(1+x)Z'(x) + 2xZ = (1+x)^3$. En effet, Z est dérivable (le raccordement en -1 se fait avec une dérivée nulle) et $Z(-1) = 0$.

Finalement on intègre pour déterminer z par une double intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int^x (1+t)^2\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t &= \left[(1+t)^2\frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2}\,\mathrm{d}t\right]^x - \int^x 2(1+t)\frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[(1+t)^2\frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2}\,\mathrm{d}t\right]^x + \int^x (1+t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[(1+t)^2\frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2}\,\mathrm{d}t\right]^x + \left[(1+t)\frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right]^x - \int^x \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[(1+t)^2\frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2}\,\mathrm{d}t\right]^x + \left[(1+t)\frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right]^x - \left[\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4}\right]^x \\ &= -\frac{1}{4}(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$z(x) = -\frac{C}{4}(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{(1+x)^3}{6} + E \text{ si } x \in I \qquad \text{et} \qquad z(x) = -\frac{D}{4}(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{(1+x)^3}{6} + F \text{ si } x \in J$$

Mais comme z est continue, nécessairement $E = F$ Et finalement, les solutions sont

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{C}{4}(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-x} + E\mathrm{e}^{x} + \frac{(1+x)^3}{6}\mathrm{e}^{x} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ -\frac{D}{4}(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-x} + E\mathrm{e}^{x} + \frac{(1+x)^3}{6}\mathrm{e}^{x} & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

avec $(C, D, E) \in \mathbb{R}^3$

Correction de l'exercice 23. 1. f est dérivable et $f' \colon x \mapsto f(\dfrac{1}{x})$, ainsi f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée de fonctions. De plus, pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. $\forall x > 0$, $x^2 f''(x) = -f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f'\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -f(x)$ ainsi $x^2 f''(x) + f(x) = 0$.
3. g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée et
   - $g \colon t \mapsto f(\mathrm{e}^t)$
   - $g' \colon t \mapsto \mathrm{e}^t f'(\mathrm{e}^t)$
   - $g'' \colon t \mapsto \mathrm{e}^t f'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t} f''(\mathrm{e}^t)$

   Or, $x^2 f''(x) + f(x) = 0$ soit $\mathrm{e}^{2t} f''(\mathrm{e}^t) + f(\mathrm{e}^t) = 0$.
   On a donc $g''(t) = \mathrm{e}^t f'(\mathrm{e}^t) - f(\mathrm{e}^t) = g'(t) - g(t)$ ainsi g est solution de $y'' - y' + y = 0$.
4. On résout $y'' - y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$ Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$, les racines de l'équation caractéristique sont donc $r_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, les solutions de $y'' - y + y = 0$ sont exactement les fonctions :

$$x \mapsto g(x) = \left[C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right] \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \qquad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

5. Procédons par analyse-synthèse :
   - **Analyse :** Si f est solution, d'après la question précédente, il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour $x > 0$:

$$f(x) = g(\ln x) = \left[C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right] \sqrt{x}$$

   De plus, $f'(x) = f(\frac{1}{x})$, ainsi

$$f'(x) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2x} C_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \frac{\sqrt{3}}{2x} C_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right] \sqrt{x} + \left[C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right] \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

   Ainsi, pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[(\frac{\sqrt{3}}{2} C_2 + \frac{1}{2} C_1) \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + (\frac{1}{2} C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} C_1) \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right] \\ = f(1/x) &= \left[C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln 1/x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln 1/x)\right] \sqrt{1/x} \end{aligned}$$

   Si on prend $x = 1$, on obtient :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} C_2 + \frac{1}{2} C_1 = C_1$$

   Soit $C_2 = \sqrt{3} C_1$ Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = C_2 \left[\sqrt{3} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right] \sqrt{x}$$

   Ainsi, on a montré que si f était solution, alors $f \colon x \mapsto K \left[\sqrt{3} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right] \sqrt{x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
   - **Synthèse :** posons $f \colon x \mapsto K \left[\sqrt{3} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right] \sqrt{x}$ avec $K \in \mathbb{R}$. En dérivant f et en calculant $f(1/x)$ on vérifie que f est bien solution.

   Conclusion, les solutions sont exactement les fonctions $f \colon x \mapsto 2K \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x - \frac{\pi}{3})$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.