DS2

14 Octobre 2023

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Exercice 1 : méli-mélo d'intégrales sur son lit de primitives

1. Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-8x+16}$
2. Calculer $\int_0^1 \frac{2x-8}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x$
3. Calculer $\int_0^1 \frac{x}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x$
4. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-7x+10}$, on précisera bien le ou les intervalles possibles.
5. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+10}$, on précisera bien le ou les intervalles possibles.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} x\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x$.
7. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x-3\mathrm{i}}$.
8. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de $x = \sin(t)$.

Exercice 2 : pas besoin d'être imaginatif avec les complexes !

1. Posons $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$, calculer sous forme algébrique z^{2023}.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^4(x)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les solutions de l'équation $z^n = 1$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les solutions de l'équation $z^n = -3+3\mathrm{i}\sqrt{3}$.
5. Déterminer les racines carrées de $5+12\mathrm{i}$.

On considère l'équation $z^2 - z - 1 - 3i = 0$ (E) et on note z_1 et z_2 les deux racines complexes de (E) (éventuellement égales en cas de racine double).

6. Sans résoudre l'équation (E), déterminer $z_1 \times z_2$ et $z_1 + z_2$.
7. Résoudre l'équation (E), vérifier si votre réponse est cohérente avec celle de la question précédente.

Exercice 3 : une fonction qui fait des smartphones et des tablettes

1. Recopiez et complétez : arccos est une bijection de   vers   , elle est dérivable sur   et pour tout $x \in$, $\arccos'(x) =$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \arccos(1-2x)$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de f. On le notera $\mathscr{D}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$ et déterminer f' sur cet intervalle.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathscr{D}$ vers un intervalle à préciser (on notera J cet intervalle).
5. Déterminer f^{-1}.
6. Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et calculer la dérivée de f^{-1}.
7. Représenter f et f^{-1} sur un même repère.

Exercice 4 : pour faire fonctionner vos études, étudiez des fonctions [1]

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$

1. Déterminer les éventuels antécédents de 2 et de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction f.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.
4. Donner l'équation de la tangente de f en 0.
5. Montrer que f est impaire.
6. Représenter f sur un schéma ainsi que sa tangente en 0.
7. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
8. Recopier et compléter : pour tout $x \in \quad$, $\cos(\arccos(x)) = \quad$.
9. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(1)} \frac{(\mathrm{e}^{2\cos(t)} - 1)\sin(t)}{\mathrm{e}^{2\cos(t)} + 1}\,\mathrm{d}t$.
10. Soit $h\colon I \to J$ une fonction, définir avec des quantificateurs que h est une bijection.
11. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.
12. Montrer que $f' = 1 - f^2$.
13. Recopier et compléter le théorème de la dérivation de la bijection réciproque : si $f\colon I \to J$ est bijective, soit $x \in J$, on pose $\quad$ si f est dérivable en $\quad$ et que $\quad$, alors f^{-1} est dérivable en $\quad$ et $(f^{-1})'(\quad) =$
14. Montrer que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et dériver f^{-1}.
15. Déterminer l'expression de f^{-1}.
16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

Exercice 5 : ne faites pas dans la demi-mesure, intégrez entièrement

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
2. Calculer $I_0 = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \times \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$ et en faisant une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$
4. Déterminer une expression de I_n à l'aide de factorielles. On rappelle que $0! = 1$ et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.
5. Écrire une fonction Python `factorielle(n)` qui renvoie $n!$

Exercice 6 : vous allez bégayer sur celui-là

Soit $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est-à-dire que f est dérivable et f' est continue), montrer que

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

1. Notez le chiasme !