Exercice : méli-mélo d'intégrales sur son lit de primitives

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-8x+16} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-4)^2} = \left[\frac{-1}{x-4}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \tfrac{2x-8}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(|x^2-8x+16|)\right]_0^1 = \ln(9)-\ln(16) = \ln(\frac{9}{16}) = 2\ln(\frac{3}{4})$

3. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{2}\times\frac{2x-8}{x^2-8x+16} + 4\times\frac{1}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\times\int_0^1 \frac{2x-8}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x + 4\times\int_0^1\frac{1}{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\times 2\ln(\frac{3}{4}) + 4\times\frac{1}{12} = \ln(\frac{3}{4})+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$, ainsi il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{2,5\}$,

$$\frac{1}{x^2-7x+10} = \frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}$$

   - En multipliant par $x-2$, on a $\dfrac{1}{x-5} = A+B\dfrac{x-2}{x-5}$, en faisant tendre x vers 2, on obtient $A=\dfrac{-1}{3}$.
   - En multipliant par $x-5$, on a $\dfrac{1}{x-2} = A\dfrac{x-5}{x-2}+B$, en faisant tendre x vers 5, on obtient $B=\dfrac{1}{3}$.

   Ainsi,

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{2,5\}\qquad \frac{1}{x^2-7x+10} = \frac{-1}{3}\times\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{x-5}$$

   Par conséquent, $x\mapsto \dfrac{1}{3}\ln(|x-5|)-\dfrac{1}{3}\ln(|x-2|) = \dfrac{1}{3}\ln\left(\left|\dfrac{x-5}{x-2}\right|\right)$ est une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2-7x+10}$ sur $]-\infty\,;2\,[$, sur $]\,2\,;5\,[$ ou sur $]\,5\,;+\infty\,[$.

5. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+4x+10=(x+2)^2+6$, ainsi, $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{6}}\right)$ est une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+4x+10}$ sur $\mathbb{R}$.

6. On pose $u\colon x\mapsto x$ et $v\colon x\mapsto \mathrm{sh}(x)$, $(u,v)\in\mathscr{C}^1([\,0\,;\ln(2)\,],\mathbb{R})^2$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} x\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x &= [x\mathrm{sh}(x)]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} 1\times\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \ln(2)\mathrm{sh}(\ln(2)) - [\mathrm{ch}(x)]_0^{\ln(2)} = \ln(2)\mathrm{sh}(\ln(2)) - \mathrm{ch}(\ln(2)) + \mathrm{ch}(0)\end{aligned}$$

   De plus, $\mathrm{ch}(\ln(2)) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln(2)}+\mathrm{e}^{-\ln(2)}}{2} = \dfrac{2+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$ et $\mathrm{sh}(\ln(2)) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln(2)}-\mathrm{e}^{-\ln(2)}}{2} = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} x\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln(2)-\frac{5}{4}+1 = \frac{3}{4}\ln(2)-\frac{1}{4}$

7. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x-3\mathrm{i}} = \dfrac{x+3\mathrm{i}}{(x-3\mathrm{i})(x+3\mathrm{i})} = \dfrac{x}{x^2+9}+3\mathrm{i}\times\dfrac{1}{x^2+9}$, ainsi, $x\mapsto\dfrac{1}{2}\ln(x^2+9)+\mathrm{i}\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$ est une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x-3\mathrm{i}}$ sur $\mathbb{R}$.

8. On pose $x=\sin(t)$, alors $\mathrm{d}x=\cos(t)\,\mathrm{d}t$, donc $\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2(t)} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos(t)}$. Or $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$, ainsi $\cos^2(t) = 1-\sin^2(t) = 1-x^2$. Dès lors, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\cos(t)} = \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$, par changement de variable $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$. De plus, il existe A et B deux réels tels que

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1,-1\}\qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}$$

- En multipliant par $1-x$, il vient $\dfrac{1}{1+x} = A + B\dfrac{1-x}{1+x}$, en faisant tendre x, vers 1, il vient, $A = \dfrac{1}{2}$.
- En multipliant par $1+x$, il vient $\dfrac{1}{1-x} = A\dfrac{1+x}{1-x} + B$, en faisant tendre x vers -1, il vient, $B = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2}\ln(|1-x|) + \frac{1}{2}\ln(|1+x|)\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2}) = \frac{\ln(3)}{2}\end{aligned}$$

Exercice : pas besoin d'être imaginatif avec les complexes !

1. - $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, ainsi, $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
   - $|\sqrt{3}-\mathrm{i}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$, ainsi, $\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   Dès lors, $z = \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$. Ainsi,

   $$z^{2023} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2023} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\times 2023\times\pi}{12}}$$

   Or, $5\times 2023 = 10\,115 = 842\times 12 + 11$. Ainsi,

   $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10115\times\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(842\times 12+11)\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,842\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$$

   Ainsi, $z^{2023} = 2^{-\frac{2023}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}} = 2^{-\frac{2023}{2}}\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}2^{-\frac{2023}{2}}\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$
2. En utilisant les formules d'Euler puis de Newton :

   $$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4 = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^4}{16} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}}{16} \\ &= \frac{2\cos(4x)+8\cos(2x)+6}{16} = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

3. Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont les n nombres complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$.
4. $|-3+3\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{9+27} = 6$, ainsi, $-3+3\mathrm{i}\sqrt{3} = 6\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi, les solutions sont les n nombres complexes : $\sqrt[n]{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$.
5. Soit $w = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors

   $$\begin{aligned} w^2 = 5+12\mathrm{i} &\iff \begin{cases} (a+ib)^2 = 5+12\mathrm{i} \\ |(a+ib)^2| = |5+12\mathrm{i}| \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-b^2+2ab\mathrm{i} = 5+12\mathrm{i} \\ |a+ib|^2 = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^2-b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \\ a^2+b^2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 8 \\ ab = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm 2 \\ ab = 6 \end{cases}\end{aligned}$$

   La dernière équation indique que a et b sont de même signe, ainsi, $w^2 = 5+12\mathrm{i}$ ssi $w = 3+2\mathrm{i}$ ou $w = -3-2\mathrm{i}$.

On considère l'équation $z^2 - z - 1 - 3i = 0$ (E) et on note z_1 et z_2 les deux racines complexes de (E) (éventuellement égales en cas de racine double).

6. D'après les formules sur la somme et le produit des racines, $z_1 z_2 = -1 - 3\mathrm{i}$ et $z_1 + z_2 = 1$.
7. Notons Δ le discriminant de (E), $\Delta = (-1)^2 - 4(-1-3\mathrm{i}) = 5 + 12\mathrm{i} = (3+2\mathrm{i})^2$, ainsi
$$z_1 = \frac{1-(3+2\mathrm{i})}{2} = -1-\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1+(3+2\mathrm{i})}{2} = 2+\mathrm{i}$$
On vérifie alors que $z_1+z_2 = (-1-\mathrm{i})+(2+\mathrm{i}) = 1$ et $z_1 \times z_2 = (-1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = -2+1+\mathrm{i}(-1-2) = -1-3\mathrm{i}$. Ce qui est bien cohérent avec le résultat de la question précédente.

Exercice : une fonction qui fait des smartphones et des tablettes

1. arccos est une bijection de $[-1;1]$ vers $[0;\pi]$, elle est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \arccos(1-2x)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme arccos est définie sur $[-1;1]$, $f(x)$ est défini ssi $-1 \leqslant 1-2x \leqslant 1$ ssi $-2 \leqslant -2x \leqslant 0$ ssi $0 \leqslant x \leqslant 1$. Par conséquent, la fonction f est définie sur $\mathscr{D} = [0;1]$.
3. Posons $g\colon x \mapsto 1-2x$ sur $]0;1[$, alors $0 < x < 1$, donc $-2 < -2x < 0$ et $-1 < 1-2x < 1$, ainsi, $g\colon]0;1[\to]-1;1[$ est dérivable et $\arccos\colon]-1;1[\to [0;\pi]$ est dérivable. Par composée, $f = \arccos \circ g$ est dérivable sur $]0;1[$. De plus, pour tout $x \in]0;1[$,
$$f'(x) = g'(x) \times \arccos'(g(x)) = -2 \times \frac{-1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$
4. Comme $g\colon [0;1] \to [-1;1]$ est strictement décroissante sur $\mathscr{D} = [0;1]$ et que arccos est strictement décroissante sur $[-1;1]$, par composée f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$. De plus, f est continue sur $\mathscr{D}$ (par composée). D'après le théorème de la bijection strictement monotone, f réalise une bijection de $[0;1]$ vers
$$f([0;1]) = [f(0);f(1)] = [\arccos(1);\arccos(-1)] = [0;\pi]$$
5. Soit $y \in [0;\pi]$, il existe un unique $x \in [0;1]$ tel que $y = f(x) = \arccos(1-2x)$, alors $\cos(y) = \cos(\arccos(1-2x)) = 1-2x$, ainsi, $\cos(y) - 1 = -2x$. Donc $f^{-1}(y) = x = \dfrac{1-\cos(y)}{2}$. Par conséquent,
$$f^{-1}\colon \begin{cases} [0;\pi] \longrightarrow [0;1] \\ y \longmapsto \dfrac{1-\cos(y)}{2} \end{cases}.$$
Remarque 1. Si on préfère, on peut noter $f^{-1}\colon \begin{cases} [0;\pi] \longrightarrow [0;1] \\ x \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{2} \end{cases}$
6. Comme cosinus est dérivable, par combinaison linéaire, f^{-1} est dérivable sur $[0;\pi]$ et pour tout $x \in [0;\pi]$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{\sin(x)}{2}$
7. Voir figure 1.

Exercice : pour faire fonctionner vos études, étudiez des fonctions [1]

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$

1. • Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = 2$ ssi $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = 2$ ssi $\mathrm{e}^{2x} - 1 = 2\mathrm{e}^{2x} + 2$ ssi $\mathrm{e}^{2x} = -3$ ce qui est impossible. Ainsi, 2 n'admet pas d'antécédents par la fonction f.

1. Notez le chiasme !

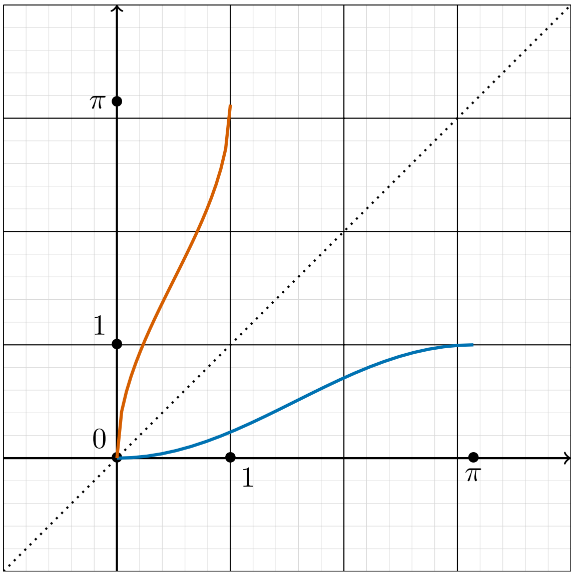

FIGURE 1 – En rouge, la courbe de f et bleu, la courbe de f^{-1}.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = \dfrac{1}{2}$ ssi $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{1}{2}$ ssi $2e^{2x}-2 = e^{2x}+1$ ssi $e^{2x} = 3$ ssi $2x = \ln(3)$ ssi $x = \dfrac{\ln(3)}{2}$.
  Ainsi, $\dfrac{1}{2}$ admet un seul antécédent par la fonction f qui est $\dfrac{\ln(3)}{2}$.

2. Comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$$
ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Or, $1-e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $1+e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Par quotient de limites, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
4. La tangente de f en 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $f(-x) = \dfrac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}$, en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{2x}, il vient, $f(-x) = \dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -f(x)$. Par conséquent, f est impaire.
6. Voir figure 2

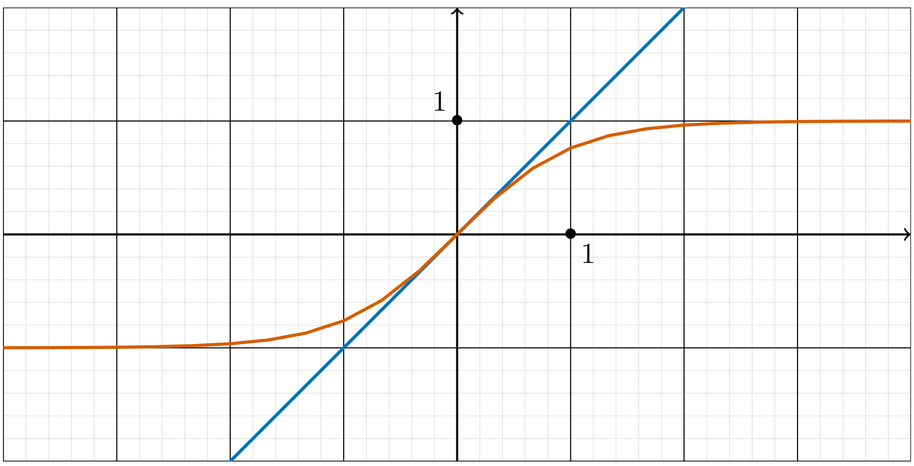

FIGURE 2 – En rouge la courbe de f, en bleu la tangente de f en 0.

7.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-\mathrm{e}^{2x}-1+2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 -1+\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \left[-x+\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)\right]_0^1 = -1+\ln(\mathrm{e}^2+1)-\ln(2) = -1+\ln(\frac{\mathrm{e}^2+1}{2})\end{aligned}$$

8. Pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$.
9. Posons $x = \cos(t)$, alors $\mathrm{d}x = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$, alors

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(1)} \frac{(\mathrm{e}^{2\cos(t)}-1)\sin(t)}{\mathrm{e}^{2\cos(t)}+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\cos(\arccos(1))} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}(-\,\mathrm{d}x) = -\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = 1-\ln(\frac{1+\mathrm{e}^2}{2})$$

10. On dit que $h\colon I \to J$ est une bijection si

$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \quad y = f(x)$$

11. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$) et strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, par imparité de f, $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$, ainsi, $f(\mathbb{R}) =]-1\,;1[$. Ainsi, $f\colon \mathbb{R} \to]-1\,;1[$ est une bijection.
12. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$1-f^2(x) = 1-\frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2-(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{2\times 2\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = f'(x)$$

En conclusion, $f' = 1-f^2$

13. Si $f\colon I \to J$ est bijective, soit $x \in J$, on pose $a = f^{-1}(x)$ si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x et $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
14. Soit $x \in]-1\,;1[$, on pose $a = f^{-1}(x) \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) > 0$, ainsi d'après le théorème de la dérivation de la bijection réciproque, f^{-1} est dérivable en x et en utilisant la question précédente

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{1-f^2(a)} = \frac{1}{1-(f(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

15. Il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}$$

- En multipliant par $1-x$, il vient $\dfrac{1}{1+x} = A+B\dfrac{1-x}{1+x}$, en faisant tendre x vers 1, il vient, $A = \dfrac{1}{2}$.
- En multipliant par $1+x$, il vient $\dfrac{1}{1-x} = A\dfrac{1+x}{1-x}+B$, en faisant tendre x vers -1, il vient, $B = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+x}$$

Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(1-x)+\dfrac{1}{2}\ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1\,;1[$. Or, comme les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1\,;1[$ diffèrent toutes d'une constante, il existe ainsi $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-1\,;1[$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+c$. Or, comme $f(0) = 0$, $f^{-1}(0) = 0$, donc $0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+0}{1-0}\right)+c$, dès lors, $c = 0$. Ainsi, pour tout $x \in]-1\,;1[$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

16. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par e^x, on obtient $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = f(x)$

Exercice : ne faites pas dans la demi-mesure, intégrez entièrement

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction $t \mapsto t^n\sqrt{1-t}$ est positive et continue sur $[\,0\,;1\,]$. par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.
2. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 0 + \frac{2}{3}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u\colon t \mapsto t^n$ et $v\colon t \mapsto -\dfrac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}$ de sorte que $(u,v) \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})^2$, $u'\colon t \mapsto nt^{n-1}$ et $v'\colon t \mapsto \sqrt{1-t}$, ainsi par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-t^n\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 nt^{n-1}\times\left(-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right)\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}\sqrt{1-t} - t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{2n}{3}(I_{n-1}-I_n) \end{aligned}$$

   Ainsi, $3I_n = 2n(I_{n-1}-I_n)$ donc $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$, comme $2n+3>0$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors en utilisant ce qui précède à I_n puis à I_{n-1} puis à I_{n-2} jusqu'à I_1 :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n}{2n+3}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+3}\times\frac{2(n-1)}{2(n-1)+3}I_{n-2} = \frac{2n}{2n+3}\times\frac{2n-2}{2n+1}\times\frac{2(n-2)}{2(n-2)+3}I_{n-4} = \dots \\ &= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\dots 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\dots 5}I_0 \end{aligned}$$

   Pour calculer cette fraction, on va multiplier au numérateur et au dénominateur par les termes pairs entre 2 et $2n+2$:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\dots 2\times(2n+2)(2n)(2n-2)\dots 4\times 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\dots 5\times(2n+2)(2n)(2n-2)\dots 4\times 2}\times\frac{2}{3} \\ &= \frac{2^n n!\times 2^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!}2 = \frac{n!2^{2n+2}(n+1)!}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

   On peut trouver ce raisonnement avec des … pas très rigoureux. On peut rendre tout ça parfait en procédant par récurrence, tout ce qu'on a fait précédemment reste au brouillon et on annonce fièrement :

   Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$I_n = \dfrac{n!2^{2n+2}(n+1)!}{(2n+3)!}$».

   - Pour $n=0$, $\dfrac{n!2^{2n+2}(n+1)!}{(2n+3)!} = \dfrac{4\times 1}{6} = \dfrac{2}{3} = I_0$ (en utilisant la question 2). Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors en utilisant la question 3,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+3}\times I_n = \frac{(2n+2)}{2n+5}\times\frac{n!2^{2n+2}(n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{(2n+4)(2n+2)n!2^{2n+2}(n+1)!}{(2n+5)(2n+4)(2n+3)!} \\ &= \frac{2(n+2)2(n+1)2^{2n+2}(n+1)!n!}{(2n+5)!} \\ &= \frac{(n+2)!(n+1)!2^{2n+4}}{(2n+5)!} = \frac{(n+1)!2^{2(n+1)+2}((n+1)+1)!}{(2(n+1)+3)!} \end{aligned}$$

     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n!2^{2n+2}(n+1)!}{(2n+3)!}$.
5.
```python
def Factoriel(n):
    p=1
    for i in range(1,n+1):#i va prendre toutes les valeurs entre 1 et n
        p=p*i
    return p
```

Exercice : vous allez bégayer sur celui-là

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u = f$ et $v\colon x \mapsto \dfrac{1}{n}\sin(nx)$, alors $(u,v) \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{R})^2$, $u' = f'$ et $v'\colon x \mapsto \cos(nx)$, ainsi,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \left[f(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{f(b)\sin(nb)}{n} - \frac{f(a)\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Traitons les trois termes séparément :

- $\dfrac{|f(b)\sin(nb)|}{n} \leqslant \dfrac{|f(b)|}{n}$, donc $-\dfrac{|f(b)|}{n} \leqslant \dfrac{f(b)\sin(nb)}{n} \leqslant \dfrac{|f(b)|}{n}$, ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\dfrac{f(b)\sin(nb)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- De même, $\dfrac{f(a)\sin(na)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $|f'(x)\sin(nx)| \leqslant |f'(x)|$, soit $-|f'(x)| \leqslant f'(x)\sin(nx) \leqslant |f'(x)|$, par croissance de l'intégrale,
$$\int_a^b -|f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$
En divisant par $n \neq 0$,
$$\frac{1}{n}\int_a^b -|f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$
D'après le théorème d'encadrement, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Par somme de trois termes qui tendent vers 0,

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Remarque 2. Ce résultat s'appelle le lemme de Riemann-Lesbegue.