Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2. 1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in [\![0 ; 8]\!]\ x = 2^n\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 14\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x \in C$ ssi $x^2 + 5x - 14 = 0$ ssi $(x+7)(x-2) = 0$ ssi $x \in \{-7; 2\}$ Ainsi, $C = \{-7; 2\}$. Soit $x \in D$, alors $x \in \mathbb{N}$ et $x(2x+3) = 14$, comme $2x + 3 \in \mathbb{N}$, on en déduit que x divise 14, ainsi x vaut 1, 2, 7 ou 14. Sur ces quatre nombres, seul 2 vérifie la condition pour être dans D. Ainsi, $D = \{2\}$.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5. Procédons par double implication :

- Supposons $A \cup B = A \cap B$. Montrons que $A = B$ par double inégalité : Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B = A \cap B$ donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$. Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B = A \cap B$ donc $x =\in A$. Ainsi, $B \subset A$. Par double inclusion, $A = B$. On a donc montré que $A \cup B = A \cap B$ implique que $A = B$.
- Supposons $A = B$. Alors $A \cup B = A \cup A = A$ et $A \cap B = A \cap A = A$. Ainsi, $A \cup B = A \cap B$. On a donc montré que $A = B$ implique que $A \cup B = A \cap B$.

Par double implication, on a montré l'équivalence demandée.

Correction de l'exercice 6. Soit $C \in \mathscr{P}(A \cap B)$, alors $C \subset A \cap B$, alors, pour tout $c \in C$, $c \in A \cap B$ donc $c \in A$, ainsi, $C \subset A$ et donc $C \in \mathscr{P}(A)$. De même, pour tout $c \in C$, $c \in A \cap B$, donc $c \in B$, ainsi, $C \subset B$, et donc $C \in \mathscr{P}(B)$. On a donc montré que $C \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Par conséquent, $\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

Soit $C \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$, alors $C \in \mathscr{P}(A)$, donc $C \subset A$ et $C \in \mathscr{P}(B)$ donc $C \subset B$, ainsi pour tout $c \in C$, $c \in A$ et $c \in B$, donc $c \in A \cap B$, donc $C \subset A \cap B$, donc $C \in \mathscr{P}(A \cap B)$. Par conséquent, $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cap B)$.

On a donc démontré que $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$.

Posons $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, alors $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing; \{1\}\}$, $\mathscr{P}(B) = \{\varnothing; \{2\}\}$, donc

$$\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}\}$$

Mais comme $A \cup B = \{1; 2\}$, en particulier, $\{1; 2\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$, en revanche, $\{1; 2\} \notin \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$. Ceci prouve que $\mathscr{P}(A \cup B)$ peut être différent de $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

Correction de l'exercice 7. 1. C est bien sûr le cercle trigonométrique.

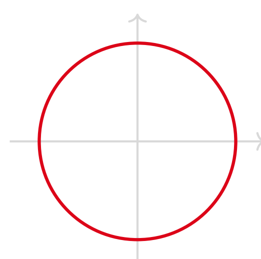

FIGURE 1 – Le cercle trigonométrique.

2. Supposons que $C = A \times B$ avec A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Comme $(1,0) \in C = A \times B$, alors on en déduit que $1 \in A$ et que $0 \in B$. De même, $(0,1) \in C$, alors on en déduit que $0 \in A$ et que $1 \in B$. Dès lors, $1 \in A$ et $1 \in B$ donc $(1,1) \in A \times B = C$. Donc $1^2 + 1^2 = 1$ ce qui est absurde. Donc C n'est pas de la forme $A \times B$ avec $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11. 1. • Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$, supposons $f(n) = f(n')$, c'est-à-dire que $2n = 2n'$ en divisant par deux, on obtient que $n = n'$. Ainsi, f est injective.

- Considérons, $m = 1 \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ est pair, donc $f(n) \neq 1$. Ainsi, 1 n'a pas d'antécédent, ainsi f n'est pas surjective.
- Calculons $g(2) = 2/2 = 1$ (car 2 est pair) et $g(1) = (1+1)/2$ (car 1 est impair), comme $2 \neq 1$, g n'est pas injective.
- Soit $m \in \mathbb{N}$, posons $n = 2m \in \mathbb{N}$, alors comme n est pair, $g(n) = n/2 = m$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) = m$. Dès lors, g est surjective.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n est pair,
$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n/2) = 2 \times n/2 = n$$
Si n est impair, alors $(f \circ g)(n) = f((n+1)/2) = n+1$. Dès lors,
$$f \circ g \colon \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \begin{cases} n & \text{si} \quad n \text{pair} \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 1. Il est possible, d'avoir $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ sans que $f \circ g$ soit égal à $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Ceci montre bien que lorsque l'on désire montrer que lorsqu'une fonction est la bijection réciproque d'une autre, il faut bien vérifier que la composée dans **les deux sens** vaut l'identité.

Correction de l'exercice 12.

1. Vrai. Supposons f est injective, montrons que $f_{|A}$ l'est aussi. Soit $(a, a') \in A^2$, supposons que $f_{|A}(a) = f_{|A}(a')$, alors $f(a) = f(a')$ comme f est injective, $a = a'$ donc $f_{|A}$ est injective.
2. Faux. Prenons $E = F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_+$ et $f = \mathrm{Id}_E$. Alors, f surjective, mais $f_{|A} \colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{cases}$ n'est pas surjective car -3 n'a pas d'antécédent.
3. Faux. Prenons $E = F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_+$ et $f \colon x \mapsto x^2$, alors $f_{|A}$ est injective mais f ne l'est pas (car $f(2) = f(-2)$).
4. Vrai. Supposons $f_{|A}$ surjective. Soit $y \in F$, alors il existe $a \in A$ tel que $y = f_{|A}$ mais alors $y = f(a)$ avec $a \in E$ donc $f \colon E \to F$ est bien surjective.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14. On remarque que pour tout $f \in E$, $\Phi(f) = f \circ (2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$. Posons $\Psi \colon f \mapsto f \circ (\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$, alors $\Psi \colon E \to E$ et pour tout $f \in E$,
$$(\Phi \circ \Psi)(f) = \Phi(\Psi(f)) = \Phi(f \circ (\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})) = (f \circ (\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})) \circ 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} = f \circ (\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = f \circ Id_{\mathbb{R}} = f$$
Ainsi, $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_E$ De même,
$$(\Psi \circ \Phi)(f) = \Psi(\Phi(f)) = \Phi(f \circ (2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})) = (f \circ (2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})) \circ \frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} = f \circ (2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ \frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = f \circ Id_{\mathbb{R}} = f$$
Ainsi, $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_E$. Ceci démontre que Φ est bijective et que $\Phi^{-1} = \Psi$.

Correction de l'exercice 15. Comme $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \mathrm{Id}_E$, f est bijective et $f^{-1} = f \circ f$.

Correction de l'exercice 16.

1. Soit $a \in A$, $f(a) = b \in f(A)$, dès lors, $a \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi, on a montré que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Posons, $A = \mathbb{R}_+$ et
$$c \colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$
Alors, $c(A) = \mathbb{R}_+$ et $c^{-1}(c(A)) = c^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$. Dès lors, $c^{-1}(c(A))$ n'est pas inclus dans A sur cet exemple.

2. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Cela veut dire qu'il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais comme $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B$, dès lors, $y \in B$. On a donc montré que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

   Prenons la même fonction c de la question précédente et $B = [\,-2\,;1\,]$. Alors, $c^{-1}(B) = [\,-1\,;1\,]$, ainsi, $c(c^{-1}(B)) = c([\,-1\,;1\,]) = [\,0\,;1\,]$. Dès lors, B n'est pas inclus dans $c(c^{-1}(B))$ sur cet exemple.

3. On suppose que f est injective. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, soit $a \in f^{-1}(f(A))$, ainsi, $f(a) \in f(A)$, ainsi il existe $\alpha \in A$ tel que $f(a) = f(\alpha)$, mais comme f est injective, on obtient que $a = \alpha \in A$, dès lors, $f^{-1}(f(A)) \subset A$, comme l'inclusion réciproque a été montré lors de la question 1, il s'ensuit que $A = f^{-1}(f(A))$ et ce pour tout $A \in \mathscr{P}(F)$.

   Réciproquement, supposons que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$ et montrons que f est injective. Soit $(x, x') \in E^2$, supposons que $f(x) = f(x')$ Notons $A = \{x\}$, alors $f(x') \in f(A)$, donc, $x' \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}$, ainsi, $x' = x$, on a donc montré que f est injective.

4. Supposons f surjective, fixons $B \in \mathscr{P}(F)$. Soit $b \in B$, alors il existe $x \in E$ tel que $b = f(x)$, donc $x \in f^{-1}(B)$ donc $b = f(x) = f(f^{-1}(B))$, ainsi $B \subset f(f^{-1}(B))$, comme on a montré l'inclusion réciproque lors de la question 2, il s'ensuit que $B = f(f^{-1}(B))$ et ce pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$.

   Supposons que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $B = f(f^{-1}(B))$, montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Posons $B = \{y\}$, alors $y \in B = f(f^{-1}(B))$, dès lors, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Ceci prouve que f est surjective.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21. 1. Soit $y \in f(D)$. Il existe alors $z \in D$ tel que $y = f(z)$. Montrons que $y \in P$:

$$\begin{aligned} y &= f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \frac{(z+\mathrm{i}) \times \overline{(z-\mathrm{i})}}{(z-\mathrm{i})\overline{(z+\mathrm{i})}} = \frac{(z+\mathrm{i})(\overline{z}-\overline{\mathrm{i}})}{|z+\mathrm{i}|^2} = \frac{(z+\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i})}{|z+\mathrm{i}|^2} = \frac{z|z|+\mathrm{i}(z+\overline{z})-1}{|z+\mathrm{i}|^2} \\ &= \frac{|z|^2-1}{|z+\mathrm{i}|^2} + \mathrm{i}\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z+\mathrm{i}|^2} \end{aligned}$$

Ceci démontre que $\mathrm{Re}(y) = \dfrac{|z|^2-1}{|z+\mathrm{i}|^2} < 0$ (car $|z| < 1$). On a donc démontré que $f\colon D \to P$.

2. Soit $y \in P$ et $z \in D$:

$$\begin{aligned} y = f(z) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \quad \Longleftrightarrow \quad y(z-\mathrm{i}) = z+\mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad yz - y\mathrm{i} = z+\mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad z(y-1) = \mathrm{i}(y+1) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \frac{\mathrm{i}(y+1)}{y-1} \end{aligned}$$

On remarque, que comme $\mathrm{Re}(y) < 0$ et que $\mathrm{Re}(1) = 1 \geqslant 0$, $1 \neq y$ donc que $y - 1 \neq 0$, ainsi la division effectuée est bien licite.

On a alors démontré que si $z \in D$ tel que $y = f(z)$, alors $z = \dfrac{\mathrm{i}(y+1)}{y-1}$. Posons, alors $z = \dfrac{\mathrm{i}(y+1)}{y-1}$, il faut alors vérifier que, $|z| < 1$. Or :

$$|z| = \frac{|\mathrm{i}(y+1)|}{|y-1|} = \frac{|y+1|}{|y-1|} = \frac{\sqrt{(1+\mathrm{Re}(y))^2 + \mathrm{Im}(y)^2}}{\sqrt{(1-\mathrm{Re}(y))^2 + \mathrm{Im}(y)^2}}$$

Or comme, $\mathrm{Re}(y) < 0$, on a $\mathrm{Re}(y) < -\mathrm{Re}(y)$ par conséquent,

$$1 - \mathrm{Re}(y) > 1 + \mathrm{Re}(y) > -(1 - \mathrm{Re}(y))$$

Ainsi, $|1+\mathrm{Re}(y)| < 1-\mathrm{Re}(y)$, comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$|(1+\mathrm{Re}(y))|^2 < (1-\mathrm{Re}(y))^2$$

Dès lors, $|z| < 1$. On a donc démontré que pour tout $y \in P$, il existe un unique $z \in D$ tel que $y = f(z)$. Pour conclure, f réalise une bijection de D dans P.

Correction de l'exercice 22. Supposons f injective. Alors, pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = f(x)$, ainsi comme f est injective $f(x) = x$. Et ce pour tout $x \in E$, donc $f = \mathrm{Id}_E$.

Supposons f surjective. Soit $x \in E$, il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$. Alors $x = f(z) = f(f(z)) = f(x)$. Et ce pour tout $x \in E$, donc $f = \mathrm{Id}_E$.

Correction de l'exercice 23. Soit x l'unique point fixe de $f^p(x) = x$, ainsi,

$$f(x) = f(f^p(x)) = f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$$

Ainsi, $f^p(f(x)) = f(x)$. Ainsi, $f(x)$ est un point fixe de f^p. Par unicité du point fixe, $f(x) = x$. Par conséquent, la fonction f admet un point fixe.

Soit x' un point fixe de f, alors $f(x') = x'$, en composant par f, il vient $f^2(x') = f(f(x')) = f(x') = x'$. En composant par f, il vient $f^3(x') = f(f^2(x')) = f(x') = x'$. En raisonnant par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n(x') = x'$. En particulier, $f^p(x') = x'$. Ainsi, x' est un point fixe de f^p. Par unicité du point fixe de f^p, $x' = x$.

En conclusion, f admet un unique point fixe.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

1. Supposons qu'il existe $g\colon F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrons que f est injective. Soit $(x, x') \in E^2$. Supposons $f(x) = f(x')$. Appliquons g, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, on obtient $x = x'$. Ainsi, f est injective[1].

   Réciproquement, supposons f est injective. Soit $y \in F$,
   - Si y n'admet pas d'antécédent par f, on pose $g(y) = x_0$ où x_0 est un élément de E quelconque.
   - si y admet (au moins) un antécédent par f, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais comme f est injective, x est unique. On pose alors $g(y) = x$.

   Ainsi, on a crée une fonction $g\colon F \to E$. Vérifions que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Soit $x \in E$, on pose $y = f(x) \in F$, alors, y admet un unique antécédent par f et c'est x, ainsi, par unicité de l'antécédent, $g(y) = x$ donc $g(f(x)) = x$. Ceci montre que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

2. Supposons qu'il existe $g\colon F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$, alors $f(g(y)) = y$. Ainsi, y admet bien un antécédent par f. La fonction f est surjective[2].

   Réciproquement, supposons f surjective. Soit $y \in F$, alors il existe un ou plusieurs antécédents de y. Choisissons[3] un $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et posons $g(y) = x$. On a donc définie une fonction $g\colon F \to E$. Vérifions que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Soit $y \in F$ et posons $x = g(y)$ alors $y = f(x) = f(g(y))$, donc $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Correction de l'exercice 26.

Correction de l'exercice 27.

1. On aurait aussi utiliser l'exercice 18, comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et que Id_E est injective, alors f est injective.
2. On aurait aussi utiliser l'exercice 18, comme $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ et que Id_E est surjective, alors f est surjective.
3. On utilise ici implicitement l'axiome du choix car on doit faire, simultanément, un tel choix pour potentiellement une infinité de y. Le problème est que cet axiome a des conséquences surprenantes en mathématiques.