Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]\,0\,;2\pi\,[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$. Ainsi, si $\sin(x) \neq 0$, alors $\cos(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$. Ici, pour $k \geqslant 1$, appliquons cette formule à $x = \dfrac{\theta}{2^k} \in]\,0\,;\pi\,[$ donc $\sin(x) > 0$, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{2\theta}{2^k}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right)}\right) = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right)}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}$$

Correction de l'exercice 4. On développe par le binôme de Newton :

$$(1+x)^n - (1+nx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} - (1+nx) = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k + \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 - (1+nx) = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k \geqslant 0$$

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

1. Posons $j = 2n+1-k$ Lorsque $k=0$, $j = 2n+1$ et lorsque $k = n$, $j = n+1$, ainsi, $S_n = \sum\limits_{j=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n+1-j}$.
2. En utilisant successivement la valeur de S_n trouvée à la question précédente, la symétrie des coefficients binomiaux puis la formule du binôme de Newton, il en découle que :

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} + \sum_{j=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}1^k 1^{2n+1-k} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} \end{aligned}$$

   En divisant par 2, on obtient que $S_n = 2^{2n}$.

Correction de l'exercice 8.

1. Comme $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, $z = (1+\mathrm{i})^{2n} = (\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^{2n} = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\frac{\pi}{2}}$
2. Développons z par la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} z &= (1+\mathrm{i})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^{2n-k}\mathrm{i}^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\mathrm{i}^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{i}^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{i}^k \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}\mathrm{i}^{2j} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1}\mathrm{i}^{2j+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}(-1)^j + \mathrm{i}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j+1}(-1)^j \\ &= S_n + \mathrm{i}T_n \end{aligned}$$

   Ainsi, par identification des parties réelles et imaginaires, on a :

$$S_n = 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n = 2^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Correction de l'exercice 9.

1. Si $x \neq 1$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$). Si $x = 1$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = n+1$.

2. Posons $f\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Comme f est polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Mais on peut aussi dériver f comme un quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Ainsi, pour $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

Attention, le terme de la somme pour $k=0$ est 1 quand on le dérive, sa dérivée est nulle, c'est pour ça qu'on a fait partir la somme à 1 et non à 0. En multipliant par x, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k} = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$$

On s'aperçoit que le terme pour $k=0$ est nul, on peut donc le rajouter. Pour tout $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k} = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$$

Pour $x=1$

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k} = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Considérons $g\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{x})^k$ Si $x \neq 0$, on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{x} \neq 1$, ainsi, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}$. En dérivant g sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ avec les deux expressions obtenues, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^{kx} = \dfrac{((n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x}(\mathrm{e}^{x}-1)-\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{(n+1)x}-1)}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2}$ Encore une fois, le terme pour $k=0$ est nul, ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{e}^{kx} = \frac{n\mathrm{e}^{(n+2)x}-(n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x}+\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2}$$

Pour $x=0$, $\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{e}^{kx} = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11. En remplaçant le cosinus par la partie réelle de l'exponentielle complexe, puis en utilisant la formule de Moivre, on reconnaît un binôme de Newton. Puis on calcule la partie réelle de ce complexe avec la technique de l'angle moitié :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})^k 1^{n-k}\right) = \mathrm{Re}\left((1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})^n\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\right)\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\theta}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n\right) = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13. 1. Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $1<3<4$, on en déduit que $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$. Dès lors, $2-\sqrt{3}>0$. Et $-\sqrt{3}>-1$, ainsi $2-\sqrt{3}>1$. Ceci prouve que $2-\sqrt{3} \in \,]\,0\,;1\,[$.

2. On développe par la formule du binôme de Newton, en séparant les termes d'indices pairs et impairs :

$$\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{3})^k 2^{n-k} = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{3})^k 2^{n-k} + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{3})^k 2^{n-k}\\
&= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2p}(\sqrt{3})^{2p}2^{n-2p} + \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n}{2p+1}\sqrt{3}^{2p+1}2^{n-2p-1}\\
&= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2p}3^p 2^{n-2p} + \sqrt{3}\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n}{2p+1}3^p 2^{n-2p-1}
\end{aligned}$$

Posons :

$$a_n = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2p}3^p 2^{n-2p} \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad b_n = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n}{2p+1}3^p 2^{n-2p-1} \in \mathbb{Z}$$

de sorte que $2+\sqrt{3} = a_n + \sqrt{3}b_n$.

3. Appliquons à nouveau la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned}
(2+(-\sqrt{3}))^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\sqrt{3})^k 2^{n-k} = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-\sqrt{3})^k 2^{n-k} + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(-\sqrt{3})^k 2^{n-k}\\
&= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2p}(-\sqrt{3})^{2p}2^{n-2p} + \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n}{2p+1}(-\sqrt{3})^{2p+1}2^{n-2p-1}\\
&= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2p}(3)^p 2^{n-2p} - \sqrt{3}\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n}{2p+1}3^p 2^{n-2p-1} = a_n - \sqrt{3}b_n
\end{aligned}$$

4. Comme $2-\sqrt{3} \in \,]\,0\,;1\,[$, $(2-\sqrt{3})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi,

$$\sin((2+\sqrt{3})^n\pi) = \sin((a_n + b_n\sqrt{3})\pi)) = \sin(-(a_n - b_n\sqrt{3})\pi + 2\pi a_n) = -\sin((2-\sqrt{3})^n\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

En effet, la fonction sin est continue en 0.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16. 1. Remarquons que pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 \neq 0$ (car c'est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif). Cette remarque, nous permet de poser, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) - \arctan(x+1) + \arctan(x)$$

Comme, arctan, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$, $x \mapsto x+1$ sont des fonctions dérivables, par composée, $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$, $x \mapsto \arctan(x+1)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par somme et différence de fonctions dérivables, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \times \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{(x^2+x+1)}\right)^2} - \frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2+1} + \frac{-(1+x^2)+1+(x+1)^2}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)}\\
&= \frac{-(2x+1)}{2+2x+3x^2+2x^3+x^4} + \frac{2x+1}{(2+2x+x^2)(1+x^2)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, f' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, ainsi f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) = \arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(0) = 0$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$.

2. En utilisant la question précédente et en reconnaissant une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Correction de l'exercice 17. 1. $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} 1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} = \sum_{i=0}^{n}(n+1) = (n+1)^2$

2. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 1 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} 1 = \sum_{j=0}^{n}(j+1) = (n+1)\frac{1+(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
3. $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1 = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=2}^{n} j-1 = (n-1)\times\frac{1+(n-1)}{2}$
4. $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n} x^i \sum_{j=0}^{n} x^j = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)^2$ Si $x=1$, alors $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = (n+1)^2$ Si $x\neq 1$, alors $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2$.
5. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j+1}$
6. $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$
7. $\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} ij$
8. Posons S_n la somme, alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} ni + \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = n\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n\times\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\times n = n^2(n+1) \end{aligned}$$

9. Notons T_n la somme, alors en séparant les cas $j\leqslant i$ et $j>i$, on obtient :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} i(n-i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{2}i^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)i = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i = -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\times\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1)(2n+1)\left[\frac{-1}{12}+\frac{1}{4}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

10. Notons V_n la somme, remarquons que pour tout $(i,j)\in\mathbb{R}^2$, $\min(i,j)+\max(i,j) = i+j$, ainsi, en effectuant V_n+T_n, on obtient par linéarité de la somme :

$$V_n + T_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)+\min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = S_n$$

Dès lors, $V_n = S_n - T_n = n(n+1)\left[n - \frac{2n+1}{6}\right] = n(n+1)\times\frac{4n-1}{6}$.

11. Notons W_n la somme, remarquons que pour tout $(i,j) \in \mathbb{R}$, $|i-j| = \max(i,j) - \min(i,j)$, ainsi, en effectuant $T_n - V_n$, on obtient :

$$V_n - T_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) - \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i+j| = W_n$$

Dès lors, $W_n = V_n - T_n = \dfrac{n(n+1)^2}{3}$.

Correction de l'exercice 18. 1. Comme la suite $(2^j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = \sum_{k=0}^{n} 2^k \times \frac{1-2^{n-k+1}}{1-2} = \sum_{k=0}^{n}\left(2^{n+1} - 2^k\right)$$

On utilise ensuite la linéarité de la somme ainsi qu'à nouveau la valeur de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} 2^k = (n+1)2^{n+1} - \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (n+1)2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = n2^{n+1} + 1$$

2. Permutons les indices :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} 2^j = \sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j$$

3. Considérons la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^{k-1}$ et posons $j = k-1$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} &= \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^j = \sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j - (n+1)2^n = S_n - (n+1)2^n \\ &= n2^{n+1} + 1 - (n+1)2^n = 2^n(2n-(n+1)) + 1 = 2^n(n-1) + 1\end{aligned}$$

4. En utilisant le résultat de la question précédente

$$T_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1} = \sum_{i=1}^{n} 2^{i+1}i + 1 = \sum_{i=1}^{n} 4\times i2^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} 1 = 4\sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} + n = 4\times 2^n(n-1) + 4 + n$$

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$2^{2n+1} + 3^{2n+1} = 3^{2n+1} - (-2)^{2n+1} = (3-(-2))\sum_{k=0}^{2n} 3^k(-2)^{2n-k} = 5\underbrace{\sum_{k=0}^{2n} 3^k(-2)^{2n-k}}_{\in\mathbb{N}}$$

Ainsi, 5 divise $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$.

Correction de l'exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$3^{5n} - 2^{5n} = (3^5)^n - (2^5)^n = (3^5 - 2^5)\sum_{k=0}^{n-1}(3^5)^i(2^5)^{n-1-i} = 211\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(3^5)^i(2^5)^{n-1-i}}_{\in\mathbb{N}}$$

Ainsi, 211 divise $3^{5n} - 2^{5n}$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 28. Supposons n non premier alors $n = ab$ avec $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$, alors $2^n - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)\sum_{k=0}^{b-1} 2^k$. Comme $3 \leqslant 2^a - 1 < 2^n - 1$, $2^n - 1$ n'est pas premier. Par contraposée, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Correction de l'exercice 29.

Correction de l'exercice 30. a est un entier naturel tel que $a \geqslant 4 \times 2 - 1 = 7$. Ainsi, a s'écrit comme un produit de nombres premiers : $a = s_1 s_2 \dots s_r$ Comme a est impair, nécessairement 2 n'apparaît pas dans sa décomposition. Ainsi tous les nombres premiers dans la décomposition de a sont impairs. Effectuons la division euclidienne de p premier impair par 4 : $p = 4q + r$ avec $r \in [\![0\,;3]\!]$, or si $r = 0$ ou si $r = 2$, p est pair ce qui est exclus. Ainsi, $p = 4q + 1$ ou $p = 4q + 3$. Supposons que tous les nombres premiers qui apparaissent dans la décomposition de a soit de la forme $s_i = 4q_i + 1$. Remarquons que

$$s_1 s_2 = (4q_1 + 1)(4q_2 + 1) = 4(4q_1 q_2 + q_1 + q_2) + 1$$

est de la forme $4\tilde{q} + 1$. ainsi, par une récurrence sur r, $\prod_{i=1}^{r} s_i$ est de la forme $4q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$ Donc

$$a = 4\prod_{i=1}^{N} p_i - 1 = 4q + 1$$

Soit $4(\prod_{i=1}^{N} p_i - q) = 2$. Donc 4 divise 2 ce qui est absurde. Ainsi, nécessairement l'un des s_i est de la forme $4q_i + 3$. Autrement dit, il existe $i_0 \in [\![1\,;N]\!]$ tel que $s_i = p_{i_0}$. Ainsi, p_{i_0} divise a et divise $\prod_{i=1}^{N} p_i$, par différence,

$$p_{i_0} | 4\prod_{i=1}^{N} p_i - a = 1$$

ce qui est absurde. Par conséquent, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 3$.

Correction de l'exercice 31.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1 = 10^n - 1^n = (10 - 1)\sum_{k=0}^{n-1} 10^k 1^{n-1-k} = 9\sum_{k=0}^{n-1} 10^k$. Comme 3 divise 9, 3 divise $10^n - 1$.
2. Par linéarité de la somme :

$$n - \sum_{k=0}^{d} a_k = \sum_{k=0}^{d} a_k 10^k - \sum_{k=0}^{d} a_k = \sum_{k=0}^{d} a_k(10^k - 1)$$

   Or 3 divise $10^k - 1$ pour tout k d'après la question précédente, donc 3 divise $a_k(10^k - 1)$ et donc divise $\sum_{k=0}^{d} a_k(10^k - 1)$. Ainsi, 3 divise $n - \sum_{k=0}^{d} a_k$.
3. Supposons que 3 divise n, alors $\sum_{k=0}^{d} a_k = n - (n - \sum_{k=0}^{d} a_k)$ est divisible par 3 comme différence d'entiers qui le sont. Supposons que 3 divise $\sum_{k=0}^{d} a_k$, alors $n = (n - \sum_{k=0}^{d} a_k) + \sum_{k=0}^{d} a_k$ est divisible par 3 comme somme d'entiers qui le sont.

4. 564 487 689 231 est divisible par 3 ssi 63 est divisible par 3 ssi 9 est divisible par 3. Or, 9 étant divisible par 3, on en conclut que 564 487 689 231 est divisible par 3.

Correction de l'exercice 32.

1. Supposons qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. Soit d un diviseur positif de a et b, alors d divise au et d divise bv, par somme, d divise $au + bv = 1$ donc $d = 1$. Ainsi, $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.
2. Supposons $a > b$ et $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$. Soit d un diviseur de $a-b$ et b, alors, par somme d divise $(a-b)+b = a$. Ainsi, d divise a et b donc $d = 1$. Ainsi, $\mathrm{PGCD}(a - b, b) = 1$.
3. Pour $n = 1$, si $(a, b) \in [\![1\,;n]\!]^2$, alors $a = b = 1$ et $a \times 1 + b \times 0 = 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $(a, b) \in [\![1\,;n+1]\!]^2$. Supposons $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$. Distinguons les cas :
   - Si $a \leqslant n$ et $b \leqslant n$, alors on peut appliquer $\mathscr{P}(n)$ à a et b.
   - Si $a = b = n + 1$, alors $1 = \mathrm{PGCD}(a, b) = n + 1$ ce qui conduit à $n = 0$ ce qui est impossible.
   - Si $a = n+1$ et $b \leqslant n$, alors, d'après la question précédente, $\mathrm{PGCD}(a-b, b) = 1$. Or $a-b \leqslant n+1-1 = n$ et $b \leqslant n$, on applique donc $\mathscr{P}(n)$ à $a - b$ et b, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(a - b)u + bv = 1$. Ainsi, $au + b(v - u) = 1$.
   - Si $b = n + 1$ et $a \leqslant n$, alors on applique ce qui précède en échangeant les rôles de a et b.

   Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
4. Supposons que a divise bc et $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, d'après ce qui précède, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv = 1$, en multipliant par c, on a $auc + bcv = c$. Or, a divise bc donc a divise bcv, a divise auc, par somme a divise c.

Correction de l'exercice 33.

1. Supposons que p divise ab avec p premier. Il y a deux cas :
   - Soit p divise a et dans ce cas p divise bien a ou b.
   - Soit p ne divise pas a. Soit d un diviseur commun à p et à a, alors, en particulier, d divise p. Cependant p est premier, donc $d = 1$ ou $d = p$. Si $d = p$, alors $d = p$ divise a ce qui est exclus. Ainsi, nécessairement, $d = 1$. Donc $\mathrm{PGCD}(a, p) = 1$, en utilisant la question 4 de l'exercice 32, p divise c.
2. D'après la formule du maire, $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$. On sait que p divise $k\binom{p}{k}$. Ainsi, d'après la question précédente, p divise k ou p divise $\binom{p}{k}$. Or $k \in [\![1\,;p-1]\!]$ donc p ne peut pas diviser k. Ainsi, p divise $\binom{p}{k}$.
3. D'après la formule du binôme de Newton :

$$(a + b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$$

   Or, d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1\,;p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$ donc p divise $\binom{p}{k}a^k b^{p-k}$, par somme, p divise $(a + b)^p - a^p - b^p$.

Correction de l'exercice 34.

1. Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(r)$: «pour tout $(a_1, a_2, \ldots, a_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ si p divise $\prod_{i=1}^{r} a_i$ alors il existe $i \in [\![1\,;r]\!]$ tel que p divise a_i». Pour $r = 1$, si p divise $\prod_{i=1}^{r} a_i = a_1$, alors p divise a_1. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(r)$ vraie. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}) \in (\mathbb{N}^*)^{r+1}$. Supposons que p divise $\prod_{i=1}^{r+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right) \times a_{i+1}$. D'après la première question de l'exercice 33, comme p est premier, soit p divise $\prod_{i=1}^{r} a_i$ soit p divise a_{i+1}. Dans le premier cas, en utilisant $\mathscr{P}(r)$, il existe $i \in [\![1\,;r]\!]$ tel que p divise a_i. Dans tous les cas p divise l'un des a_i. Dès lors $\mathscr{P}(r + 1)$ est vraie.
2. p_1 divise $n = q_1 \times q_1 \times \ldots q_1 \times q_2 \times q_2 \times \ldots q_s \times q_s$. D'après la question 1, p_1 divise l'un des termes, ainsi il existe $j_0 \in [\![1\,;s]\!]$ tel que p_1 divise q_{j_0}. Or, q_{j_0} est premier Donc $p_1 = 1$ ou $p_1 = q_{j_0}$. Or, $p_1 > 1$ donc $p_1 = q_{j_0}$. En simplifiant par $p_1 = q_j$, on obtient :

$$\frac{n}{p_1} = p_1^{\alpha_1 - 1} \prod_{i=2}^{r} {p_i}^{\alpha_i} = q_{j_0}^{\beta_{j_0}-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{s} {q_j}^{\beta_j}$$

Ainsi, $\dfrac{n}{p_1}$ admet deux décomposition ce qui contredit le fait que ce soit n qui ait deux décompositions. La décomposition d'un nombre en facteurs de nombres premiers et donc unique.

Correction de l'exercice 35.

Correction de l'exercice 36.

Correction de l'exercice 37.