DS3

25 Novembre 2023

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Calculs en vrac... exercice écolo

1. Déterminer l'ensemble D sur lequel $f\colon x \mapsto \arcsin(\mathrm{e}^x)$ est dérivable et dériver-la.
2. Montrer que f réalise une bijection de D vers un intervalle à préciser. Déterminer l'expression explicite de f^{-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines n-ièmes de $1 - \mathrm{i}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{C}$. Calculer $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x^{i+j}$.
5. Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_{10} = 5$. Calculer $\sum\limits_{k=4}^{n} u_k$ pour un entier $n \geqslant 4$.
6. Soit un entier $n \geqslant 2$, calculer $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \big(\arctan(k^2) - \arctan(k^2 + 2k + 1)\big)$.
8. À l'aide d'un changement de variable, calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x + 11\sqrt{x} + 30)}$.
9. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{lcl} 5x - 2y + 3z & = & 10 \\ 4x + y + 5z & = & 21 \\ 4x + 3y + 7z & = & 31 \end{array} \right.$.
10. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de 306 et 234.
11. Résoudre le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}_+^*$: $\left\{ \begin{array}{lcl} y' - \dfrac{2}{x} y & = & -x^2 \sin(x) \\ y(\frac{\pi}{2}) & = & 3 \end{array} \right.$.
12. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta + \varphi)$
13. Soit $g\colon x \mapsto \arctan(x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction g est-elle injective ?
14. Calculer $g(\mathbb{R})$ et $g^{-1}\left(\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]\right)$ où g est la fonction définie à la question précédente.

Allons ensembles de la partie... exercice nationale

1. Soient E et F deux ensembles. Recopiez et complétez l'équivalence : $\qquad F \in \mathscr{P}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad$.

Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On définit un nouvel ensemble $A + B$ par compréhension :

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \qquad x = a + b\}$$

2. Déterminer l'ensemble $A + B$ dans les cas suivants :
   (a) $A = \{2\}$ et $B = \{3\}$.
   (b) $A = \{2, 3\}$ et $B = \{-1, 3\}$.
   (c) A quelconque et $B = \varnothing$.
   (d) $A \neq \varnothing$ et $B = \mathbb{R}$
   (e) $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$.

   On justifiera tous les cas sauf les cas (a) et (b).
3. Soient $(A, A', B, B') \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^4$ montrer que

$$(A \subset A' \quad \text{et} \quad B \subset B') \quad \Longrightarrow \quad A + B \subset A' + B'$$

4. Soient $(A, A', B) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^3$, montrer que

$$(A \cup A') + B = (A + B) \cup (A' + B)$$

5. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^2$ avec $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. On pose $f\colon \begin{cases} A \times B \longrightarrow A+B \\ (a,b) \longmapsto a+b \end{cases}$. La fonction f est-elle nécessairement surjective ? injective ? On justifiera ses réponses.
6. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^2$ avec $A \neq \varnothing$. Montrer que $\quad 0 \in B \implies A \subset A+B$
7. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?
8. Question bonus : si A et B sont des intervalles de $\mathbb{R}$, est-ce que $A+B$ est un intervalle de $\mathbb{R}$?

Des ordres embêtants... problème tyrannique (combattez la tyrannie)

On s'intéresse à la résolution sur $I = \,]\,0\,;+\infty\,[$ de l'équation différentielle d'ordre 2.

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x) \qquad (E)$$

On note (H) l'équation homogène associée. On remarque que cette équation différentielle n'est pas à coefficients constants, on ne peut donc pas résoudre l'équation homogène avec les résultats du cours.

Calculs préliminaires

1. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

2. En déduire une primitive de $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ sur I.
3. Déterminer une primitive de $g\colon x \mapsto x\ln(x)$ sur I.
4. Déterminer une primitive de $h\colon x \mapsto (1-x^2)\ln(x)$ sur I.

Résolution de l'équation homogène

5. Montrer que $y\colon x \mapsto x$ est solution de (H).
6. Soit $y\colon I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on pose $z\colon x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$ sur I. Montrer que y est solution de (H) si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle $xu' + \dfrac{2}{1+x^2}u = 0$. (E').
7. Résoudre (E')
8. Déterminer l'ensemble des solutions de (H).

Résolution de l'équation (E)

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_P\colon x \mapsto x\lambda(x) + \mu(x)(x^2-1)$ où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables sur I vérifiant

$$\forall x \in I \qquad x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0$$

9. Exprimer y_P' et y_P'' en fonction de λ et μ.
10. Montrer que y_P est solution de (E) si et seulement si

$$\forall x \in I \qquad \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln(x)$$

11. Déterminer λ' et μ'.
12. En déduire une solution particulière de (E).
13. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).