Correction de l'exercice 1. 1. En effectuant la division euclidienne comme en CM2 :

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
X^5 & -2X^4 & & & & -1 & \frac{1}{2}X^2+X-2 \\ \cline{7-7}
-X^5 & -2X^4 & +4X^3 & & & & 2X^3-8X^2+24X-80 \\ \cline{1-3}
 & -4X^4 & +4X^3 & & & & \\
 & 4X^4 & +8X^3 & -16X^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 12X^3 & -16X^2 & & & \\
 & & -12X^3 & -24X^2 & +48X & & \\ \cline{3-5}
 & & & -40X^2 & +48X & -1 & \\
 & & & 40X^2 & +80X & -160 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 128X & -161 &
\end{array}
$$

2. On remarque que $d^\circ A < d^\circ B$, donc $A = B0 + A$ est la division euclidienne de A par B
3. Remarquons que les racines de B sont -1 et -2. Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B = 2$. Ainsi, $R = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Dès lors,
   - En remplaçant X par -1, il vient $2 = B(-1)Q(-1) + (-a) + b = b - a$ (car $B(-1) = 0$)
   - En remplaçant X par -2, de même, il vient $2^{20}+1 = B(-2)Q(-2)+(-2a)+b = b-2a$ (car $B(-2) = 0$)

   On obtient donc le système $\begin{cases} b-a & = & 2 \\ b-2a & = & 2^{20}+1 \end{cases}$. En faisant $L_1 - L_2$, il vient $a = 1 - 2^{20}$. Et donc $b = 2 + a = 3 - 2^{20}$. Dès lors, $R = (1 - 2^{20})X + (3 - 2^{20})$.
4. A priori, on ne connaît pas les racines de B, donc on cherche des racines évidentes [1]. On trouve que 1 et -2 sont deux racines évidentes, et on sait que la somme des trois racines vaut -3 (ou que le produit des racines vaut 4). Nécessairement, la troisième racine est -2, (-2 est donc racine double). La division euclidienne de A par B est donc de la forme $X^n + X = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B = 3$. Ainsi, $R = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   - En remplaçant X par 1, on a $2 = A(1) = B(1)Q(1) + a + b + c = a + b + c$.
   - En remplaçant X par -2, on a $(-2)^n - 2 = B(-2)Q(-2) + 4a - 2b + c = 4b - 2b + c$.
   - En dérivant la division euclidienne, on a $nX^{n-1}+1 = B'Q+BQ'+2aX+b$. En remplaçant X par -2, on obtient [2]
   $$n(-2)^{n-1} + 1 = B'(-2)Q(-2) + B(-2)Q'(-2) - 4a + b = -4a + b$$

   On obtient donc le système d'équations :
   $$\begin{cases} c+b+a & = & 2 \\ c-2b+4a & = & (-2)^n - 2 \\ b-4a & = & n(-2)^{n-1}+1 \end{cases}$$

   Posons $x = (-2)^n$ et $y = n(-2)^{n-1}$ pour simplifier les calculs, ainsi
   $$\begin{cases} c+b+a & = & 2 \\ c-2b+4a & = & x-2 \\ b-4a & = & y+1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 + 3L_3}{\iff} \begin{cases} c+b+a & = & 2 \\ -9a & = & 3y+x-1 \\ b-4a & = & y+1 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} a & = & -\dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{9} + \dfrac{1}{9} \\ b & = & 4a+y+1 = \dfrac{-y}{3} - \dfrac{4x}{9} + \dfrac{13}{9} \\ c & = & 2-a-b = \dfrac{2y}{3} + \dfrac{5x}{9} + \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

1. $B(0) = -4 \neq 0$, $B(1) = 0$, $B(2) = 16 \neq 0$, $B(-1) = -2 \neq 0$, $B(-2) = 0$.
2. Remarquer que pour que cela fonctionne, on utilise le fait que -2 soit racine de B et de B' (c'est le cas, car -2 est racine double), cela ne fonctionnerait par avec 1 qui est une racine simple.

Il nous reste finalement à remplacer x et y par leurs valeurs respectives ainsi :

$$a = -\frac{(-2)^{n-1}\,n}{3} - \frac{(-2)^n}{9} + \frac{1}{9} \qquad b = -\frac{(-2)^{n-1}\,n}{3} - \frac{4\,(-2)^n}{9} + \frac{13}{9} \qquad \text{et} \qquad c = -\frac{(-2)^n\,n}{3} + \frac{5\,(-2)^n}{9} + \frac{4}{9}$$

Finalement, le reste est

$$R = \left(-\frac{(-2)^{n-1}\,n}{3} - \frac{(-2)^n}{9} + \frac{1}{9}\right)X^2 + \left(-\frac{(-2)^{n-1}\,n}{3} - \frac{4\,(-2)^n}{9} + \frac{13}{9}\right)X + \left(-\frac{(-2)^n\,n}{3} + \frac{5\,(-2)^n}{9} + \frac{4}{9}\right)$$

5. La division euclidienne est de la forme $A = BQ + R$ avec $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $d^\circ R < d^\circ B = 2$, ainsi $R = a + bX$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Donc $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n = BQ + a + bX$. En remplaçant X par i, il vient

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = (\mathrm{i}^2 + 1)Q(\mathrm{i}) + a + \mathrm{i}b = a + b\mathrm{i}$$

   Dès lors, $a + b\mathrm{i} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$ (formule de Moivre). En identifiant parties réelles et imaginaires (a et b sont des réels), on a $a = \cos(n\theta)$ et $b = \sin(n\theta)$. Par conséquent $R = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

6. Par division euclidienne $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B = 3$. Ainsi, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R = aX^2 + bX + c$. De plus, $B = (X-1)^3$. On a donc $X^n = (X-1)^3Q + aX^2 + bX + c$, en évaluant en 1, on $1 = 0 + a + b + c$. Comme 1 est racine triple de B, on dérive deux fois : $nX^{n-1} = 3(X-1)^2Q + (X-1)^3Q' + 2aX + b$ ainsi, $n = 2a + b$. $n(n-1)X^{n-2} = 6(X-1)Q + 3(X-1)^2Q' + 3(X-1)^2Q' + (X-1)^3Q'' + 2a$ ainsi, $n(n-1) = 2a$. Dès lors, $a = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $n = n(n-1) + b$ donc $b = 2n - n^2$ et $c = 1 - a - b = 1 - \dfrac{n(n-1)}{2} - 2n + n^2$ Dès lors, $R = \dfrac{n(n-1)}{2}X^2 + (2n - n^2)X + (1 + \dfrac{n^2 - 3n}{2})$.

Correction de l'exercice 2. Notons $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$, d'après le cours, $(X-1)^2$ divise P ssi 1 est racine de multiplicité[3] au moins deux dans P ssi $P(1) = P'(1) = 0$. Or,

$$P(1) = P'(1) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} a + b &= -1 \\ (n+1)a + nb &= 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - nL_1}{\iff} \begin{cases} a + b &= -1 \\ a &= n \end{cases} \quad a = n \text{ et } b = -n-1$$

Ainsi, seul le couple $(n, -n-1)$ convient.

Correction de l'exercice 3.

1. $X^a - 1 = X^a - 1^a = (X-1)\sum\limits_{k=0}^{a-1} X^k X^{a-1-k} = (X-1)\sum\limits_{k=0}^{a-1} X^k$ Ainsi, $X-1$ divise $X^a - 1$. Autre méthode : 1 est racine de $X^a - 1$ donc $X - 1$ divise $X^a - 1$.
2. Si $b|a$, alors il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = bq$. Alors :

$$X^a - 1 = (X^b)^q - 1^q = (X^b - 1)\sum_{k=0}^{q-1}(X^b)^k 1^{q-1-k} = (X^b - 1)\sum_{k=0}^{q-1} X^{kb}$$

   ainsi, $X^b - 1 | X^a - 1$.
3. On sait que $X^b - 1$ divise $X^{bq} - 1$, on essaye donc de faire apparaître du $X^{bq} - 1$ dans $X^a - 1$:

$$X^a - 1 = X^{bq+r} - 1 = X^{bq}X^r - 1 = ((X^b)^q - 1)X^r + X^r - 1 = (X^b - 1)\sum_{k=0}^{q-1}(X^b)^k + X^r - 1$$

   Comme r est le reste de la division euclidienne de a par b, $0 \leqslant r < b$, ainsi, $d^\circ(X^r - 1) \leqslant r < b = d^\circ(X^b - 1)$. Ainsi, $X^r - 1$ est bien le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$.
4. Si $X^b - 1$ divise $X^a - 1$, alors le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ est nul, ainsi, $X^r - 1 = 0$ donc $r = 0$, ainsi $a = bq + 0$ et donc b divise a.

3. Ne pas oublier le «au moins», en effet, si $(X-1)^2$ divise P, 1 n'est pas forcément de multiplicité 2, il pourrait être de multiplicité 3, 4 ou plus.

Correction de l'exercice 4. Comme $A = BC$, on peut dire que $A = BC + 0$ avec $d^\circ 0 < d^\circ B$, ainsi, 0 est le reste de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$ et C en est le quotient.

De plus, comme A et B sont dans $\mathbb{R}[X]$, on peut faire la division euclidienne de A par B : il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B$, mais Q et R sont aussi dans $\mathbb{C}[X]$, ainsi, par unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$, $C = Q$ et $0 = R$. Ainsi, $C = Q \in \mathbb{R}[X]$.

Correction de l'exercice 5. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $Q^2 = XP^2$, avec P et Q non nuls. alors d'après les formules sur les degrés, $2d^\circ Q = d^\circ X + 2d^\circ P$. Ainsi, $1 = 2(d^\circ Q - d^\circ P)$ ce qui prouve que 1 est pair ce qui est absurde. Si $P = 0$, alors $Q^2 = 0$ donc $Q = 0$ (car $\mathbb{K}[X]$ est intègre). Si $Q = 0$, alors $XP^2 = 0$ or $X \neq 0$ donc $P = 0$ (car, encore une fois, $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Réciproquement $(0, 0)$ est bien solution.

En conclusion, seul $(0, 0)$ vérifie la relation demandée.

Correction de l'exercice 6. Soit P un polynôme tel que $P \circ P = P$. Si P est non constant, alors $d^\circ P \times d^\circ P = d^\circ P$. Ainsi, $d^\circ P = 0$ ou $d^\circ P = 1$. Donc $P = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Or,

$$P \circ P = aP + b = a(aX + b) + b = a^2X + ab + b$$

Ainsi, $P \circ P$ ssi $\begin{cases} a^2 = a \\ ab + b \quad = \quad b \end{cases}$ ssi $(a = 1$ et $b = 0)$ ou $a = 0$ Ainsi les solutions sont exactement X et les polynômes constants.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. Soit $y \in \mathbb{C}$. On pose, $Q = P - y$, alors $d^\circ Q = d^\circ P \geqslant 1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, Q admet une racine. Il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $Q(x) = P(x) - y = 0$. Par conséquent, $y = P(x)$, le complexe y admet bien un antécédent pour $\tilde{P}$. En conclusion, la fonction polynomiale associée à P est surjective.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14. $X^{2n} - 1$ est un polynôme de degré $2n$ qui admet $2n$ racines distinctes qui sont les racines $2n$-ième de l'unité. Ces racines sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{2n}}$ pour[4] $k \in [\![0\,; 2n-1]\!]$. Comme $X^{2n} - 1$ est unitaire, on peut écrire :

$$X^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} \right)$$

Comme les polynômes de degré 1 sont irréductibles, ceci est bien la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. Pour la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ on va faire apparaître chaque racines avec sa racine conjuguée en prenant bien soin d'isoler les racines réelles :

$$\begin{aligned}
X^{2n} - 1 &= \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} \right) \prod_{k=n}^{2n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} \right) \underset{j=2n-k}{=} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} \right) \prod_{j=1}^{n} \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n-j)\pi}{n}} \right) \\
&= \underbrace{(X-1)}_{k=0} \underbrace{(X+1)}_{j=n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} \right) \left(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} \right) \right) \\
&= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)
\end{aligned}$$

4. On pourrait gagner du temps en affirmant que l'on peut prendre $k \in [\![-n+1\,; n]\!]$ car c'est plus symétrique par rapport à 0.

On remarque que $X-1$ et $X+1$ sont des polynômes irréductibles (car de degré 1) et pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $X^2 - 2X\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) + 1$ est un polynôme réel de degré 2 dont les racines sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}$ donc complexes non réelles, ainsi ce polynôme est irréductible. Ainsi, on a bien la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n}-1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction de l'exercice 15. Si P est un tel polynôme, alors on a une somme de 5 réels positifs qui est nulle, donc tous les termes sont nuls. Ainsi, 0, -3, 5, $-\pi$ et 42 sont racines de P avec $d^\circ P \leqslant 4$. Ainsi, P a plus de racines que son degré. Ainsi P est nul. Réciproquement si $P=0$, alors on a bien la relation $P(0)^2 + P(-3)^2 + P(5)^4 + P(-\pi)^6 + P(42)^{42} = 0$.

Correction de l'exercice 16.

1. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = Q(n)$. Posons $R = P - Q$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n) = P(n) - Q(n) = 0$. Ainsi, R a une infinité de racines donc $R=0$. D'où $P-Q=0$ ie $P=Q$.
2. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\sin(x)) = Q(\sin(x))$. Posons $R = P-Q$, alors, pour tout $a \in [\,-1\,;1\,]$, $R(a) = P(\sin(\arcsin(a)) - Q(\sin(\arcsin(a)) = 0$. Ainsi, R a une infinité de racines (l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$), ainsi R est nul. Dès lors, $P=Q$.
3. Supposons que $x \mapsto P(x)$ soit périodique. Notons T la période (rappelons alors que $T>0$). Posons $R = P - P(0)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R(nT) = P(nT) - P(0) = P(0) - P(0) = 0$. Ainsi, R a une infinité de racines (tous les nT pour $n\in\mathbb{N}$ et il y en a une infinité car $T \neq 0$), donc $R=0$ puis $P = P(0)$ donc P est constant.

Correction de l'exercice 17. Soit P un tel polynôme, alors en remplaçant X par 0, on obtient $3P(0)=0$ donc $P(0)=0$. Puis en remplaçant X pur -2, on obtient $2P(-1) = 0$ donc $P(-1)=0$. En remplaçant X par -2, on obtient $1P(-2) = 0$. Ainsi, 0, -1 et -2 sont racines. Dès lors, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)Q$ Ainsi, $(X+3)X(X+1)(X+2)Q = X(X+1)(X+2)(X+3)(Q(X+1))$ Par conséquent $X(X+1)(X+2)(X+3)\left(Q - Q(X+1)\right) = 0$. Comme $X(X+1)(X+2)(X+3)$ n'est pas le polynôme nul, par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, on en déduit que $Q - Q(X+1) = 0$ Soit $Q(X) = Q(X+1)$. Par conséquent, $x \mapsto Q(x)$ est 1-périodique. D'après la question 3 de l'exercice 16, Q est constant. Par conséquent, $P = \lambda X(X+1)(X+2)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Réciproquement, si $P = \lambda X(X+1)(X+2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(X+3)P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)$ tandis que $XP(X+1) = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ donc $(X+3)P = XP(X+1)$.

Les polynômes vérifiant $(X+3)P = XP(X+1)$ sont donc exactement $\lambda X(X+1)(X+2)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 18. Notons a une éventuelle racine multiple de P_n. Alors $P_n(a) = {P_n}'(a) = 0$. $P_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$, alors[5]

$$ {P_n}' = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1} $$

Ainsi, $P_n(a) = P_{n-1}(a) = 0$. Par différence $P_n(a) - P_{n-1}(a) = \dfrac{a^n}{n!} = 0$. Ainsi, nécessairement $a=0$. Or, $0 = P_n(0) = 1$ ce qui est impossible. Par conséquent, P_n n'a que des racines complexes simples.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20. D'après le cours, il existe un unique $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$ \frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} $$

5. Attention quand vous dérivez de bien isoler le terme constant dont la dérivée sera nulle, en effet, écrire $(X^k)' = kX^{k-1}$ est problématique pour $k=0$, X^{k-1} n'a alors pas de sens. Si vous n'êtes pas convaincu, essayez de remplacer X par 0, c'est encore pire si après vous faites la simplification avec les factorielles avec du $(k-1)!$ si $k=0$...

En multipliant par X et en remplaçant X par 0, on obtient $a = 1/2$. En multipliant par $X+1$ et en remplaçant X par -1, $b = -1$. En multipliant par $X+2$ et en remplaçant X par -2, $c = 1/2$. Ainsi,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{2(k+1)} \right) - \left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} \right) \right)$$

En posant $u_k = \dfrac{1}{2(k+1)} - \dfrac{1}{2k}$, on reconnait une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_1 = \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{4}$$

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

1. Écrivons $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_i)$ avec λ le coefficient dominant de P. Comme P est scindé et que $d^\circ P' < d^\circ P$, $\dfrac{P'}{P}$ admet une décomposition en éléments simples de la forme :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - x_k}$$

Avec $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Fixons $i \in [\![1\,;n]\!]$ et multiplions par $X - x_i$, ainsi $\dfrac{(X-x_i)P'}{P} = \alpha_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \dfrac{X - x_i}{X - x_k}$. Comme $X - x_i$ divise P, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - x_i)Q$, donc

$$\frac{P'}{Q} = \alpha_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \frac{X - x_i}{X - x_k} \tag{1}$$

En outre, en dérivant P, $P' = Q + (X - x_i)Q'$, ainsi $P'(a_i) = Q(a_i)$, ainsi en évaluant l'égalité (1) en a_i, on obtient $\dfrac{P'(a_i)}{Q(a_i)} = \alpha_i + 0$. Soit $\alpha_i = 1$. En conclusion [6]

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$$

2. En évaluant en 0, on obtient $P'(0)/P(0) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{-x_k}$, ainsi $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k} = \dfrac{-P'(0)}{P(0)}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{-1}{x - x_k}$, en dérivant cette expression, on obtient

$$\frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P^2(x)} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{(x - x_k)^2} \leqslant 0$$

Ceci prouve que $P'(x)^2 - P''(x)P(x) \geqslant 0$, en faisant tendre x vers x_i par continuité, on obtient que $P'(x)^2 - P''(x)P(x) \geqslant 0$ si $x = x_i$.

6. Il existe une technique de physiciens très rapide pour trouver ce résultat, comme $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$, donc $\ln(P) = \ln(\lambda) + \sum_{k=1}^{n} \ln(X - x_k)$, puis on dérive des deux côtés : $P'/P = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X - x_k}$. Alors c'est bien gentil, mais c'est quoi le logarithme d'un polynôme ? Que se passe-t-il si x_k ou λ est négatif ou pire complexe ?

Correction de l'exercice 26.

Correction de l'exercice 27. 1. $r_1+r_2+r_3=-\dfrac{0}{1}$ (la somme des racines vaut l'opposé du quotient entre l'avant dernier coefficient et le dernier) Ainsi, $r_1+r_2+r_3=0$. De plus, $r_1r_2r_3=(-1)^3\dfrac{2}{1}$ (le produit des racines vaut $(-1)^n$ multiplié par le coefficient constant divisé par le coefficient dominant). Ainsi, $r_1r_2r_3=-2$.

2. Si $r_1\geqslant 0$, alors on aurait $r_2\geqslant 0$ et $r_3\geqslant 0$, ainsi le produit $r_1r_2r_3\geqslant 0$ ce qui est impossible. Par conséquent, $r_1<0$.
3. Comme $r_1r_2r_3<0$ avec $r_1<0$, $r_2r_3>0$. Ainsi, r_2 et r_3 sont de même signe (soit ils sont tous les deux strictement positifs soit ils sont strictement négatifs) Si $r_2<0$ et $r_3<0$. Par somme $r_1+r_2+r_3<0$. Comme $r_1+r_2+r_3=0$, ceci est impossible. Ainsi, $r_2>0$ et $r_3>0$. De plus, $r_1r_2r_3=-2$, donc $|r_1||r_2||r_3|=2$. En particulier, $|r_1|$ divise 2 et 2 est premier. Ainsi, soit $|r_1|=2$ soit $|r_1|=1$. Distinguons les cas :
   - Si $|r_1|=2$, alors comme $r_1<0$, $r_1=-2$. Et $r_2r_3=1$, ainsi r_2 et r_3 sont des entiers naturels qui divise 1, ainsi $r_2=r_3=1$. Ici, $(r_1,r_2,r_3)=(-2,1,1)$
   - Si $|r_1|=1$, alors $r_1=-1$ et $r_2r_3=2$. Comme 2 est premier soit $r_2=1$ et $r_3=2$ soit $r_2=2$ et $r_3=1$ mais ce dernier cas est impossible car $r_2\leqslant r_3$. Ainsi, $(r_1,r_2,r_3)=(-1,1,2)$, mais alors $r_1+r_2+r_3=2\neq 0$.

   Ainsi nécessairement $r_1=-2$, $r_2=1$ et $r_3=1$
4. 1 est racine double, donc ${P_a}'(1)=0$. Or ${P_a}'=3X^2-(a^2+2a)$. Ainsi, ${P_a}'(1)=3-a^2-2a$. On a donc l'équation $a^2+2a+3=0$, dont les racines sont -3 et 1. Comme $a\in\mathbb{N}$. Nécessairement, $a=1$.
5. Si $a=1$. Alors, $P_a=X^3-3X+2$. Alors $P_a(-2)=0=P_a(1)={P_a}'(1)$ (car ${P_a}'=3X^2-3$).

   En conclusion, $a=1$ est la seule valeur telle que P_a est trois racines dans $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 28. 1. Montrons que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes :

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}\geqslant 0$. Donc $(u_n)_n$ est croissante.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$,
$$v_{n+1}-v_n=\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(u_n+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n+(n+1)n-(n+1)^2}{n(n+1)^2}\leqslant 0$$
  Ainsi, $(v_n)_n$ est décroissante.
- $v_n-u_n=\dfrac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Par conséquent, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite.

2. $P_1=1$, $P_2=2X$ et $P_3=3X^2-1$.
3. Par la formule du binôme de Newton
$$\begin{aligned}
P_n(X) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}\mathrm{i}^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}(-\mathrm{i})^k\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}\left(\mathrm{i}^k-(-\mathrm{i})^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}\left(\frac{\mathrm{i}^k-(-\mathrm{i})^k}{2\mathrm{i}}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\frac{\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\frac{\pi}{2}}}{2\mathrm{i}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\in\mathbb{R}[X]
\end{aligned}$$

4. Isolons les deux premiers termes dans la somme obtenue précédemment :

$$P_n = \binom{n}{0}\sin(0)X^n+\binom{n}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)X^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)X^{n-k} = nX^{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j}\sin\left((n-j)\frac{\pi}{2}\right)X^j$$

Comme $n \neq 0$, dès lors, $d^\circ P_n = n-1$, de plus P_n a pour coefficient dominant n (ce qui est cohérent avec les calculs de P_0, P_1 et P_2).

5. • Supposons n paire. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \mapsto y^n$ est alors paire, on obtient :

$$P_n(-x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((-x+\mathrm{i})^n-(-x-\mathrm{i})^n\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((x-\mathrm{i})^n-(x+\mathrm{i})^n\right) = -P_n(x)$$

Ainsi, la fonction associée à P_n est impaire.

• Supposons n impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \mapsto y^n$ est alors impaire, on obtient :

$$P_n(-x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((-x+\mathrm{i})^n-(-x-\mathrm{i})^n\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(-(x-\mathrm{i})^n+(x+\mathrm{i})^n\right) = P_n(x)$$

Ainsi, la fonction associée à P_n est paire.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Et cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que z soit racine de P_n :

$$P_n(z) = 0 \iff \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[(z+i)^n-(z-i)^n\right] = 0 \iff (z+i)^n = (z-i)^n$$

Remarquons alors que $z = \mathrm{i}$ n'est pas racine de P_n. Fixons donc $z \in \mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 &\iff \exists k \in [\![0\,;n-1]\!] \quad \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in [\![0\,;n-1]\!] \quad z+\mathrm{i} = (z-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in [\![0\,;n-1]\!] \quad z(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}}) = -\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}}+1\right) \end{aligned}$$

Remarquons que $k = 0$ est impossible car conduirait à $0 = -2\mathrm{i}$. Ainsi,

$$P_n(z) = 0 \iff \exists k \in [\![1\,;n-1]\!] \quad z = \frac{-\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}}+1\right)}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}}} = (-\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)} = (-\mathrm{i})\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Ainsi, on a trouvé que les racines de P_n sont de la forme $\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$. Comme la fonction cotan est strictement décroissante sur $]\,0\,;\pi\,[$, on en déduit que nous avons trouvé exactement $n-1$ racines distinctes de P_n.

7. D'après ce qui précède, on sait que P_n est un polynôme de degré $n-1$ et de coefficient dominant n dont on connaît $n-1$ racines. $P_n = n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$

8. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(s_0, s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $S(X) = \sum_{k=1}^{N} s_k X^{2k}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad s(-x) = \sum_{k=1}^{N} s_k(-x)^{2k} = \sum_{k=1}^{N} s_k x^{2k}$$

Ainsi, $x \mapsto S(x)$ est paire. Réciproquement, supposons que $x \mapsto S(x)$ est paire. Notons $S = \sum_{k=0}^{n} s_k X^k$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s(x) = s(-x)$, d'où $\sum_{k=0}^{n} s_k(x^k-(-x)^k) = 0$. Ainsi, $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} s_k(1-(-1)^k)X^k$ a une infinité de racines (tout réel est racine de Q), donc Q est le polynôme nul, donc tous ces coefficients sont nuls. Ainsi, pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$, $s_k(1-(-1)^k) = 0$. Or si k est impair, on obtient $2s_k = 0$, donc $s_k = 0$. Ainsi, tous les s_k sont nuls pour k impair. Dès lors $S = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} s_k X^k$. En notant $p = 2k$ et en faisant un changement d'indice, on obtient $S = \sum_{p=0}^{E(n/2)} s_{2p}(X^2)^p$

9. D'après la question 5, la fonction polynomiale associée à P_{2n+1} est paire. Donc d'après la question 8, il existe $N \in \mathbb{N}$ et il existe $(x_0, x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que

$$P_{2n+1} = \sum_{k=0}^{N} x_k X^{2k} = \sum_{k=0}^{N} x_k (X^2)^k$$

Notons $R_n(X) = \sum_{k=0}^{N} x_k X^k$. Alors $R_n(X^2) = P_{2n+1}(X)$.

10. Par propriété des degrés, on obtient $d^\circ P_{2n+1} = d^\circ R_n \times d^\circ X^2$. Soit $2n = 2d$, dès lors, $d = n$. Notons $R_n = aX^n + bX^{n-1} + \tilde{R}$ où $\tilde{R} \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Le but est de trouver a et b. Comme $R_n(X^2) = P_{2n+1}(X)$, on obtient

$$aX^{2n} + bX^{2n-2} + \tilde{R}(X^2) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \alpha_k^{2n+1} X^k$$

Par identification, on obtient que

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{2n}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n} = (-1)^0\binom{2n+1}{1} = 2n+1 \\ b &= \alpha_{2n-2}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2} = (-1)^1\binom{2n+1}{3} = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3} \end{aligned}$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $R_n(x) = R_n((\sqrt{x})^2) = P_{2n+1}(\sqrt{x})$ Donc $R_n(x) = 0$ si et seulement si $\sqrt{x}$ est une racine de P_{2n+1} si et seulement si $\sqrt{x} = \operatorname{cotan}(k\pi/(2n+1))$ avec $k \in [\![1 ; 2n]\!]$. Or comme $\sqrt{x} \geqslant 0$ et que $\operatorname{cotan}(k\pi/(2n+1)) \geqslant 0$ si $k \leqslant n$. On en déduit que, pour $k \in [\![1 ; n]\!]$, $\operatorname{cotan}(k\pi/(2n+1))^2$ est racine de R_n. Or $d^\circ R_n = n$, donc R_n a au plus n racines, et comme cotan^2 est injective sur $]\,0 ; \pi/2\,[$ (strictement décroissante), on a ainsi trouvé exactement n racines de R_n. Donc, on a toutes les racines de R_n. Dès lors

$$R_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)^2\right)$$

12. On sait, d'après le cours[7], on sait que si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, alors la somme des racines de P vaut $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, on obtient donc ici

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{-\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

13. Présentons deux méthodes :
    - Considérons $f : x \mapsto x - \sin(x)$. Comme f est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f' : x \mapsto 1 - \cos(x) \geqslant 0$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$. De plus, pour $x \in]\,0 ; \pi/2\,[$, $\sin(x) > 0$. Posons maintenant $g : x \mapsto \tan(x) - x$, comme g est la différence de deux fonctions dérivables sur $[\,0 ; \pi/2\,[$, g est dérivable sur cet intervalle et $g' : x \mapsto 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geqslant 0$, ainsi g est croissante sur $[\,0 ; \pi/2\,[$ et pour tout $x \in [\,0 ; \pi/2\,[$, $g(x) \geqslant 0$, ainsi $\tan(x) \geqslant 0$.

7. La connaissance du cours n'est pas facultative.

- Comme la fonction sinus est deux fois dérivable et que $\sin'' = -\sin$, on en déduit que sin est concave sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, ainsi, sin est en dessous de sa tangente en 0. Or l'équation de la tangente de sin en 0 est $x \mapsto \sin(0) + \sin'(0)(x-0) = x$. Dès lors, pour tout $\theta \in [\,0\,;\pi/2\,[$, $\sin(\theta) \leqslant \theta$. De plus, sin est strictement positive sur $]\,0\,;\pi/2\,[$, dès lors, $\sin(\theta) > \theta$.
Comme, $\tan' = 1 + \tan^2$ et que $\tan'' = 2(1+\tan^2)(\tan)$, on obtient que $\tan''$ est positive sur $[\,0\,;\pi/2\,[$ donc est convexe sur $[\,0\,;\pi/2\,[$, ainsi, tan est au dessus de sa tangente en 0 sur $[\,0\,;\pi/2\,[$. Or l'équation de la tangente de tan en 0 est $x \mapsto \tan(0)+\tan'(0)(x-0) = x$ Donc pour tout $\theta \in [\,0\,;\pi/2\,[$, $\tan(\theta) \geqslant \theta$.
En rassemblant ces inégalités, on a montré que
$$\forall \theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\qquad 0 < \sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta)$$

14. Soit $p \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, alors $\theta_p = \pi\dfrac{p}{2n+1}$, avec $0 < \dfrac{p}{2n+1} \leqslant \dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{1}{2}$, ainsi, $\theta_p \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$, dès lors on peut appliquer le résultat de la question précédente à θ_p, ainsi $\sin(\theta_p) \leqslant \theta_p \leqslant \tan(\theta_p)$. Or la fonction $x \mapsto x^{-2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que ${\theta_p}^{-2} \leqslant \text{cotan}^2(\theta_p)$. De plus,
$$1 + \text{cotan}^2(\theta_p) = 1 + \frac{\cos^2(\theta_p)}{\sin^2(\theta_p)} = \frac{1}{\sin^2(\theta_p)}$$
Comme $0 < \sin(\theta_p) \leqslant \theta$ et que $x \mapsto x^{-2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $1 + \text{cotan}^2(\theta_p) = \dfrac{1}{\sin^2(\theta_p)} \geqslant {\theta_p}^{-2}$. En réunissant ces deux résultats :
$$\text{cotan}^2(\theta_p) \leqslant \frac{1}{{\theta_p}^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2(\theta_p)$$

15. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour $p \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2(\theta_p) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{{\theta_p}^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \text{cotan}^2(\theta_p)\right) = n + \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2(\theta_p)$$
En utilisant le résultat de la question 12 et la définition de θ_p, il vient :
$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant n + \frac{n(2n-1)}{3}$$
Soit
$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{(n\pi^2)}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$
Or, $2n-1 \sim 2n$, par produit, $n(2n-1) \sim 2n^2$, et $2n+1 \sim 2n$, par produit, $3(2n+1)^2 \sim 12n^2$ par quotient d'équivalents,
$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim \frac{\pi^2 2n^2}{12n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
Or, si est une suite est équivalente à une constante non nulle, d'après le cours, elle tend vers cette constante. Ainsi,
$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$
Par somme de limites finies
$$\frac{(n\pi^2)}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$
Grâce au théorème d'encadrement, on en conclut que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\pi^2}{6}$.