Indication pour l'exercice 1.

Indication pour l'exercice 2. Pour la question 2, on pourra partir du fait que si f existe alors $f(u) = (2, 1)$ et $f(v) = (1, -1)$, et le cours indique exactement combien de fonctions comme cela existent.

Indication pour l'exercice 3.

Indication pour l'exercice 4.

Indication pour l'exercice 5. Le noyau est donné par une équation différentielle qu'il faut impérativement savoir résoudre.

Indication pour l'exercice 6. Une application linéaire est entièrement caractérisée par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.

Indication pour l'exercice 7. On prouvera que le noyau de Δ est formé des polynômes constants. Pour l'image, on pourra d'abord appliquer le théorème du rang.

Indication pour l'exercice 8. Étudier seulement l'injectivité, car on est en dimension finie, ainsi, on peut récupérer la surjectivité à peu de frais.

Indication pour l'exercice 9.

Indication pour l'exercice 10.

Indication pour l'exercice 11.

Indication pour l'exercice 12. Par un argument de dimension, n'étudier que l'injectivité. Pour trouver l'isomorphisme réciproque. On pourra commencer par essayer de calculer $\Phi^{-1}(e_i)$ où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est ainsi un polynôme P tel que $\Phi(P) = e_i$, ainsi, $P(a_j) = 0$ si $j \neq i$ et $P(a_i) = 1$.

Indication pour l'exercice 13.

Indication pour l'exercice 14.

Indication pour l'exercice 15. On pourra poser une certaine application linéaire qui sera (avec un peu de chance) bijective.

Indication pour l'exercice 16.

Indication pour l'exercice 17.

Indication pour l'exercice 18.

1. Écrire la définition de liée
2. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$
3. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$, on pourra utiliser $x + y$
4.
5.

Indication pour l'exercice 19. Si f n'est pas une homothétie, par contraposée, il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ soit libre. Complétez cette famille en une base, puis définir $g \in \mathscr{L}(E)$ (à l'aide de la base), de façon à ce que f et g ne commutent pas.

Indication pour l'exercice 20. Pour montrer que $p \circ q$ est un projecteur, calculer $(p \circ q) \circ (p \circ q)$. Si $p \circ Q$ est un projecteur sur F parallèlement à G alors on sait que $F = \mathrm{Im}(p \circ q)$ et $G = \mathrm{Ker}(p \circ q)$. On pourra montrer qu'ici $F = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et $G = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Indication pour l'exercice 21. Considérer une combinaison linéaire nulle et appliquer à f cette relation autant de fois que nécessaire.

Indication pour l'exercice 22.

Indication pour l'exercice 23.

Indication pour l'exercice 24. Poser $\Phi \begin{cases} F \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ f \longmapsto (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)) \end{cases}$ et essayer de montrer que Φ est un isomorphisme.

Indication pour l'exercice 25.

Indication pour l'exercice 26. On pourra comparer $\mathrm{Im}(f+g)$ à $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Indication pour l'exercice 27. Montrer que l'application est linéaire et surjective puis montrer que $F \cap G$ et $\{(f, f),\text{ où } f \in F \cap G\}$ ont même dimension. Le théorème du rang doit vous permettre de donner une nouvelle preuve de la formule de Grassmann.

Indication pour l'exercice 28. Penser au théorème du rang.

Indication pour l'exercice 29. Appliquer le théorème du rang à $u_{|F}$.

Indication pour l'exercice 30. Analyse-Synthèse.

Indication pour l'exercice 31.

Indication pour l'exercice 32.

Indication pour l'exercice 33.

Indication pour l'exercice 34. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, raisonner par équivalence le fait que $(x, y, z) \in F$ pour trouver un système linéaire à trois équations, le résoudre, pour trouver une équation vérifiée par x, y et z.

Indication pour l'exercice 35. Penser à la caractérisation des hyperplans avec les formes linéaires

Indication pour l'exercice 36. Regardez bien, ce résultat n'est pas le même que dans l'exercice 33.

Indication pour l'exercice 37.

Indication pour l'exercice 38. Considérer A et B des matrices élémentaires.

Indication pour l'exercice 39. Considérer $x_0 \notin H$ et la décomposition $E = \text{vect}(x_0) \oplus H$.

Indication pour l'exercice 40.