Indication pour l'exercice 1.

Indication pour l'exercice 2.

Indication pour l'exercice 3.

1.
2. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec (x, y, z) et le vecteur $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$.

Indication pour l'exercice 4. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec f' et la fonction constante égale à 1.

Indication pour l'exercice 5.

Indication pour l'exercice 6.

1.
2. $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^T A)$ se montre directement. Pour l'autre inclusion, prendre $X \in \mathrm{Ker}(A^T A)$, on a $A^T A X = 0$ puis multiplier par X^T.
3. Une inclusion se montre directement, l'autre en calculant les dimensions et en utilisant le théorème du rang.

Indication pour l'exercice 7. Si $g \in H^\perp$, considérer la fonction $t \mapsto tg(t)$.

Indication pour l'exercice 8.

Indication pour l'exercice 9.

Indication pour l'exercice 10.

1.
2. Pour montrer que $V \oplus W = E$, procéder par analyse-synthèse.

Indication pour l'exercice 11.

1. Se rappeler de ce qu'on peut dire d'un polynôme qui a strictement plus de n racines dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$.
3.
4. Écrire $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$ et évaluer en a_i.

Indication pour l'exercice 12. Considérer x des vecteurs de la base $\mathscr{B}$.

Indication pour l'exercice 13.

Indication pour l'exercice 14.

1.
2. Développer $\cos((n+1)\arccos(x))$ et $\cos((n-1)\arccos(x))$ grâce à des formules de trigonométrie.
3. Récurrence double.
4.
5.

Indication pour l'exercice 15.

Indication pour l'exercice 16. Interpréter la question comme la projection orthogonale de M sur $F = \mathrm{vect}(I_n, J)$.

Indication pour l'exercice 17.

Indication pour l'exercice 18.

Indication pour l'exercice 19. Interpréter la question comme une distance entre $t \mapsto t^2$ et l'espace vectoriel $F = \mathrm{vect}(\cos, \sin)$.

Indication pour l'exercice 20.

Indication pour l'exercice 21.