DS4

13 janvier 2024

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les problèmes dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.
Vous rédigerez les problèmes sur des copies séparées.

Comme Neo, affrontez la matrice !

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées avec p lignes et p colonnes à coefficients réels. Soit $N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on dit que N est nilpotente d'indice trois si $N^3 = 0_p$ et $N^2 \neq 0_p$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $E(t) = I_p + tN + \dfrac{t^2}{2}N^2$ (on dit que $E(t)$ est l'exponentielle de la matrice tN).

1. **Dans cette question uniquement**, on prend $p = 3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que N est nilpotente d'indice trois.
   (b) Calculer **explicitement**, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $E(t)$.
   (c) Montrer que la matrice $E(10)$ est inversible et déterminer son inverse.

On reprend maintenant $p \in \mathbb{N}^*$ quelconque et $N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice trois quelconque.

2. Que vaut $E(0)$?
3. Montrer que pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $E(t)E(s) = E(t + s)$.
4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $E(t)^n = E(tn)$.
6. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que si $aI_p + bN + cN^2 = 0_n$ alors nécessairement $a = b = c = 0$.
   Indication : se rappeler que $N^3 = 0_p$.
7. En déduire que l'application $E\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto E(t) \end{cases}$ est injective. Est-elle surjective ?

Soit $\tilde{N}$ une autre matrice nilpotente d'indice 3, telle que N et $\tilde{N}$ commutent et on note $\tilde{E}(t) = I_p + t\tilde{N} + \dfrac{t^2}{2}\tilde{N}^2$.

8. Posons $M = N + \tilde{N}$, montrer que $M^5 = 0_n$.

On suppose que $M^3 = 0_n$ et on pose $F(t) = I_p + tM + \dfrac{t^2}{2}M^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

9. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)\tilde{E}(t) = F(t)$.
10. Soit $A \in E(\mathbb{R})$, démontrer qu'il existe $R \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $R^2 = A$.
    Remarque : on dit que R est une racine carrée de A.

Polynômes de pierres en Suisse

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0 ; n]\!]$, on pose $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0 ; n]\!]$, déterminer le degré du polynôme $B_{n,k}$ son coefficient dominant ainsi que les racines de $B_{n,k}$ dont on donnera les multiplicités.
   Traiter les cas $k = 0$ et $k = n$ à part.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k}$.
3. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0 ; n]\!]$ et $x \in [\, 0 ; 1 \,]$, $0 \leqslant B_{n,k}(x) \leqslant 1$.
4. Pour $k \in [\![1 ; n]\!]$, exprimer $k\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.
5. En déduire un calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} kB_{n,k}$
6. Généraliser en calculant $k(k-1)\binom{n}{k}$ puis $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$ puis $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1 ; n-1]\!]$, exprimer la dérivée $B_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k B_{n,k} = 0$ et on cherche à montrer que pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$, $\alpha_k = 0$. On raisonne par l'absurde.

8. Montrer que $\{k \in [\![0 ; n]\!] \mid \alpha_k \neq 0\}$ admet bien un minimum.

On note k_0 ce minimum.

9. Trouver une contradiction.
   On pourra utiliser la multiplicité d'une racine de B_{n,k_0}
10. Montrer que la fonction suivante est injective :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ \quad P \quad \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \end{cases}$$

Suites à Babylone

On pose $p_0 = q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$ et $1 \leqslant q_n \leqslant p_n$.

On pose $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{2}|$
4. En déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$.
6. En déduire l'expression de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit une suite récurrente par : $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{2}{v_n}\right)$.

7. Écrire une fonction `Suitev(n)` de façon récursive qui, à un paramètre $n \in \mathbb{N}$, renvoie la valeur de v_n.
8. À l'aide d'une fonction appropriée, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \left[\sqrt{2} ; 2\right]$, étudier la monotonie de $(v_n)_n$, puis démontrer que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$.
9. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n, u_n et v_n.
10. Déterminer la limite de $(t_n)_n$. Entre $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, déterminer celle qui converge le plus rapidement vers $\sqrt{2}$.