Comme Neo, affrontez la matrice !

1. (a) $N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_3$ et $N^3 = N^2 \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$, ainsi, la matrice N est nilpotente d'indice trois.

   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$E(t) = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) $E(10) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 50 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls, ainsi $E(10)$ est une matrice inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 50 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 10L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 50L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 10L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -10 & 50 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, $E(10)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 50 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(-10)$

2. $E(0) = I_p + 0N + \frac{0^2}{2}N^2 = I_p$
3. Soit $(t, s) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} E(t)E(s) &= \left(I_p + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right)\left(I_p + sN + \frac{s^2}{2}N^2\right) \\ &= I_p + sN + \frac{s^2}{2}N + tN + tN \times sN + tN \times \frac{s^2}{2}N + \frac{t^2}{2}N + \frac{t^2}{2}N^2 \times sN + \frac{t^2}{2}N^2 \times \frac{s^2}{2}N^2 \\ &= I_p + (s+t)N + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2} + ts\right)N^2 + \left(\frac{st^2}{2} + \frac{ts^2}{2}\right)N^3 + \frac{s^2t^2}{4}N^4 \\ &= I_p + (s+t)N + \frac{(s+t)^2}{2}N^2 + 0_n + 0_n = E(t+s) \end{aligned}$$

   (en effet, $N^3 = 0_n$ et $N^4 = N^3 \times N = 0_n \times N = 0_3$)
4. Soit $t \in \mathbb{R}$, en utilisant la question précédente,

$$E(t)E(-t) = E(t + (-t)) = E(0) = I_p \qquad \text{et} \qquad E(-t)E(t) = E(-t+t) = E(0) = I_p$$

   Ceci prouve que $E(t)$ est une matrice inversible et $E(t)^{-1} = E(-t)$.
5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(n)$: «$E(t)^n = E(tn)$».
   - Pour $n = 0$, $E(t)^n = E(t)^0 = I_p$ et $E(tn) = E(0) = I_p$, ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

$$E(t)^{n+1} = E(t)^n E(t) \underset{\mathscr{P}(n)}{=} E(nt)E(t) \underset{\text{question 3}}{=} E(nt + t) = E((n+1)t)$$

   Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(t)^n = E(nt)$.

6. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $aI_p + bN + cN^2 = 0_n$.
   - En multipliant cette égalité par N^2, il vient $(aI_p+bN+cN^2)N^2 = 0_pN^2$ soit $aN^2+bN^3+cN^4 = 0_n$, comme $N^3 = N^4 = 0_n$, on obtient $aN^2 = 0_n$, si $a \neq 0$, alors en multipliant par $\dfrac{1}{a}$, il s'ensuit que $N^2 = 0_n$ ce qui est absurde donc $a = 0$.
   - Comme $a = 0$, $bN + cN^2 = 0_n$ en multipliant par N, on obtient $bN^2 + cN^3 = 0_n$ donc $bN^2 = 0_n$, encore une fois, il en découle que $b = 0$.
   - Comme $a = b = 0$, $cN^2 = 0_n$ et donc (*bis repetita*) $c = 0$.

   Ainsi, on a montré que
$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \qquad aI_p + bN + cN^2 = 0_n \quad \Longrightarrow a = b = c = 0$$

7. Soit $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, supposons $E(t) = E(s)$ donc $I_p + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = I_p + sN + \dfrac{s^2}{2}N^2$ donc
$$(1-1)I_p + (t-s)N + \left(\frac{t^2-s^2}{2}\right)N^2 = 0_p$$
   en appliquant la question précédente à $a = 1-1$, $b = t-s$ et $c = \dfrac{t^2-s^2}{2}$, on obtient que $b = t-s = 0$, ainsi $t = s$. Par conséquent, E est injective.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est inversible et $0_p \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ n'est pas inversible. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t) \neq 0_p$. Par conséquent, 0_p est une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ qui n'a pas d'antécédent par la fonction E. La fonction E n'est pas surjective.

8. Comme N et $\tilde{N}$ commutent par la formule du binôme de Newton :
$$\begin{aligned} M^5 &= (N+\tilde{N})^5 \\ &= \binom{5}{0}\underbrace{N^5}_{=0_p} + \binom{5}{1}\underbrace{N^4}_{=0_p}\tilde{N} + \binom{5}{2}\underbrace{N^3}_{=0_p}\tilde{N}^2 + \binom{5}{3}N^2\underbrace{\tilde{N}^3}_{=0_p} + \binom{5}{4}N\underbrace{\tilde{N}^4}_{=0_p} + \underbrace{\tilde{N}^5}_{=0_p} = 0_p \end{aligned}$$

9. - Comme N et $\tilde{N}$ commutent par la formule du binôme de Newton
$$0_n = (N+\tilde{N})^3 = N^3 + 3N^2\tilde{N} + 3N\tilde{N}^2 + \tilde{N}^3 = 3(N^2\tilde{N} + N\tilde{N}^2)$$
     On en déduit que $N^2\tilde{N} + N\tilde{N}^2 = 0_p$.
   - De même,
$$0_n = (N+\tilde{N})^4 = N^4 + 4N^3\tilde{N} + 6N^2\tilde{N}^2 + 4N\tilde{N}^3 + \tilde{N}^4 = 6N^2\tilde{N}^2$$
     On en déduit que $N^2\tilde{N}^2 = 0_n$.

   Soit $t \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} E(t)\tilde{E}(t) &= \left(I_p + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right)\left(I_p + t\tilde{N} + \frac{t^2}{2}\tilde{N}^2\right) \\ &= I_p + t(N+\tilde{N}) + \frac{t^2}{2}\left(N^2 + 2N\tilde{N} + \tilde{N}^2\right) + \frac{t^3}{2}(N^2\tilde{N} + N\tilde{N}^2) + \frac{t^4}{4}(N^2\tilde{N}^2) \\ &= I_p + t(N+\tilde{N}) + \frac{t^2}{2}\left(N+\tilde{N}\right)^2 + 0_n + 0_n = F(t) \end{aligned}$$

10. Comme $A \in E(\mathbb{R})$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A = E(t)$. Posons $R = E(t/2)$, en utilisant la question 5,
$$R^2 = E\left(\frac{t}{2}\right)^2 = E\left(2 \times \frac{t}{2}\right) = E(t) = A$$
    On a ainsi trouvé une matrice $R \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $R^2 = A$.

Polynômes de pierres en Suisse

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0\,; n]\!]$, on pose $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

1.
   - Si $k = 0$, $B_{n,k} = (1-X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-X)^k 1^{n-k} = (-1)^n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}(-X)^k$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$ et 1 est la seule racine et sa multiplicité vaut n.
   - Si $k = n$, $B_{n,k} = X^n$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant 1, 0 est sa seule racine et sa multiplicité vaut n.
   - Si $k \in [\![1\,; n-1]\!]$, alors

     $$d^\circ B_{n,k} = d^\circ X^k (1-X)^{n-k} = d^\circ X^k + d^\circ (1-X)^{n-k} = k + (n-k) = n$$

     De plus,

     $$B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} (X-1)^{n-k} = \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X-0)^k (X-1)^{n-k}$$

     Ainsi, $B_{n,k}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Le coefficient dominant vaut $\binom{n}{k}(-1)^{n-k}$, $B_{n,k}$ a deux racines 0 de multiplicité k et 1 de multiplicité $n-k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme de Newton

   $$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1^n = 1$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0\,; n]\!]$ et $x \in [\,0\,; 1\,]$, ainsi, $1 - x \geqslant 0$, dès lors, $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ est le produit de trois nombres positifs, donc $B_{n,k}(x) \geqslant 0$. De plus, comme pour tout j, $B_{n,j}(x) \geqslant 0$, $B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{j=0}^{n} B_{n,j}(x) = 1$. Ainsi, on a montré que $0 \leqslant B_{n,k}(x) \leqslant 1$.
4. Soit on reconnaît directement la formule du maire, soit on recalcule :

   $$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

5. En retirant le terme pour $k = 0$ (qui est nul), en utilisant la question précédente, puis un changement d'indice, on reconnaît une formule du binôme de Newton :

   $$\begin{aligned}
   \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\
   &\underset{i=k-1}{=} n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} X^{i+1} (1-X)^{n-1-i} = nX \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} X^i (1-X)^{n-1-i} \\
   &= nX(X + (1-X))^{n-1} = nX
   \end{aligned}$$

6. Soit $k \in [\![2\,; n]\!]$, alors [1]

   $$\begin{aligned}
   k(k-1)\binom{n}{k} &= k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} \\
   &= n(n-1)\binom{n-2}{k-2}
   \end{aligned}$$

   Ainsi, en procédant de même qu'à la question 5 :

   $$\begin{aligned}
   \sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-k} \\
   &\underset{i=k-2}{=} n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} X^{i+2} (1-X)^{n-2-i} \\
   &= n(n-1)X^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} X^i (1-X)^{n-2-i} \\
   &= n(n-1)X^2 (X + (1-X))^{n-2} = n(n-1)X^2
   \end{aligned}$$

1. Cette formule sera appelée formule du maire et de son adjoint.

De plus, par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)B_{n,k} + kB_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} = n(n-1)X^2 + nX$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $B_{n,k} = \binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$ par dérivation d'un produit et en utilisant la formule du maire,

$$\begin{aligned} B'_{n,k} &= \binom{n}{k}kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - \binom{n}{n-k}(n-k)X^k(1-X)^{n-k-1} \\ &= n\binom{n-1}{k-1}X^{k-1}(1-X)^{n-k} - n\binom{n-1}{n-1-k}X^k(1-X)^{n-k-1} \\ &= nB_{n-1,k-1} - nB_{n-1,k} \end{aligned}$$

8. On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe $k \in [\![0\,;n]\!]$ tel que $\alpha_k \neq 0$. Ainsi, en définissant un ensemble par $E = \{k \in [\![0\,;n]\!] \mid \alpha_k \neq 0\}$, E est un ensemble fini non vide. Par conséquent, E admet un minimum.
9. Comme $k_0 = \min(E)$, pour tout $k \in [\![0\,;k_0-1]\!]$, $\alpha_k = 0$, ainsi comme $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k B_{n,k} = 0$, on en déduit que $\sum\limits_{k=k_0}^{n} \alpha_k B_{n,k} = 0$, en isolant le premier terme et en divisant par $\alpha_{k_0} \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} B_{n,k_0} &= \frac{-1}{\alpha_{k_0}} \sum_{k=k_0+1}^{n} \alpha_k B_{n,k} = \frac{-1}{\alpha_{k_0}} \sum_{k=k_0+1}^{n} \alpha_k \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} \\ &= \frac{-X^{k_0+1}}{\alpha_{k_0}} \sum_{k=k_0+1}^{n} \alpha_k \binom{n}{k} X^{k-k_0-1}(1-X)^{n-k} \end{aligned}$$

   On en déduit que $(X-0)^{k_0+1}$ divise B_{n,k_0} ainsi la multiplicité de 0 dans B_{n,k_0} est supérieure ou égale à k_0+1. Or, elle vaut k_0 d'après la question 1. On obtient donc une contradiction. Par conséquent, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\alpha_k = 0$.
10. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, supposons $\Phi(P) = \Phi(Q)$, alors par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(P\left(\frac{k}{n}\right) - Q\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k} = 0$$

   d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $P(k/n) = Q(k/n)$, ainsi P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncident au moins en $n+1$ réels, donc $P = Q$. Par conséquent, Φ est injective.

Suites à Babylone

On pose $p_0 = q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: «$(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$ et $1 \leqslant q_n \leqslant p_n$».
   - Comme $p_0 = q_0 = 1$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ est la somme de deux entiers naturels donc $p_{n+1} \in \mathbb{N}$, de même $q_{n+1} \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} = p_n + q_n \geqslant q_n \geqslant 1$, de plus, $p_{n+1} - q_{n+1} = q_n \geqslant 0$, donc $p_{n+1} \geqslant q_{n+1}$, dès lors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$ et $1 \leqslant q_n \leqslant p_n$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = \frac{u_n q_n + 2q_n}{u_n q_n + q_n} \underset{q_n \neq 0}{=} \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-\sqrt{2}| &= \left|\frac{u_n+2}{u_n+1}-\sqrt{2}\right| = \left|\frac{u_n+2-\sqrt{2}(u_n+1)}{u_n+1}\right| = \frac{|u_n(1-\sqrt{2})+2-\sqrt{2}|}{|1+u_n|}\\ &= \frac{|(1-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2})|}{|1+u_n|} = \frac{|1-\sqrt{2}|\times|u_n-\sqrt{2}|}{|1+u_n|} = \frac{(\sqrt{2}-1)\times|u_n-\sqrt{2}|}{|1+u_n|}\end{aligned}$$

De plus, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n} \geqslant \dfrac{p_n}{p_n} = 1$, donc $|1+u_n| = 1+u_n \geqslant 2$, ainsi $|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}|u_n-\sqrt{2}|$.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$|u_n-\sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}|$».

- Pour $n=0$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}| = |u_0-\sqrt{2}| \geqslant |u_0-\sqrt{2}|$, ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors

$$|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{2}|u_n-\sqrt{2}| \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}| = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\sqrt{2}|$$

  Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après les propriétés sur la valeur absolue :

$$\sqrt{2} - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}| \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}|$$

De plus, $\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right| < 1$, donc par limite des suites géométriques, $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par théorème d'encadrement, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+2} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_n + 2q_n + 2(p_n+q_n) = 4q_n + 3p_n = 2(2q_n+p_n) + p_n = 2p_{n+1} + p_n$$

ainsi $p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$.

6. Ainsi, $(p_n)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 1 = 0$, le discriminant vaut $8 > 0$ ainsi les solutions de l'équation caractéristique sont $\dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Ainsi, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$, de plus, $p_0 = 1$ et $p_1 = 3$, dès lors, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} A+B &= 1\\ A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) &= 3\end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2-(1-\sqrt{2})L_1}{\iff} \begin{cases} A+B &= 1\\ 2\sqrt{2}A &= 3-(1-\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A+B &= 1\\ A &= \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases} A &= \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\\ B &= 1-A = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\end{cases}$$

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \dfrac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$.

On définit une suite récurrente par : $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{2}{v_n}\right)$.

7.
```python
def Suitev(n):
    if n==0:
        return 2
    a=Suitev(n-1)
    return (a+2/a)/2
```

8. On pose $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$, f est dérivable sur $\left[\sqrt{2}\,;2\right]$ et pour tout $x \in \left[\sqrt{2}\,;2\right]$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right) > 0$$

ainsi, f est strictement croissante et continue sur $\left[\sqrt{2}\,;2\right]$, donc

$$f\left(\left[\sqrt{2}\,;2\right]\right) = \left[f(\sqrt{2})\,;f(2)\right] = \left[\sqrt{2}\,;\frac{3}{2}\right] \subset \left[\sqrt{2}\,;2\right]$$

Dès lors, $\left[\sqrt{2}\,;2\right]$ est un intervalle stable par la fonction f, comme $v_0 \in \left[\sqrt{2}\,;2\right]$, d'après le théorème de l'intervalle stable, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \left[\sqrt{2}\,;2\right]$. De plus, comme f est croissante $(v_n)_n$ est monotone. Plus précisément, comme $v_1 = f(1) = \dfrac{3}{2} < v_0$, on en déduit que $(v_n)_n$ est décroissante. En outre, $(v_n)_n$ est une suite minorée (par $\sqrt{2}$), d'après le théorème de la limite monotone on en déduit que $(v_n)_n$ converge vers un $\ell \in \mathbb{R}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leqslant v_n \leqslant 2$ et que les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, $\sqrt{2} \leqslant \ell \leqslant 2$. Ceci assure que f est continue en ℓ, d'après le théorème du point fixe, on a alors $f(\ell) = \ell$ soit $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$, ainsi, $\ell^2 = 2$ donc $\ell = \pm\sqrt{2}$. Comme $-\sqrt{2} < \sqrt{2} \leqslant \ell$, on en déduit que $\ell \neq -\sqrt{2}$ d'où $\ell = \sqrt{2}$. Par conséquent, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} = \frac{v_{n+1}-\sqrt{2}}{u_{n+1}-\sqrt{2}} = \frac{\dfrac{{v_n}^2+2-2\sqrt{2}v_n}{2v_n}}{\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}(u_n-\sqrt{2})} = \frac{\dfrac{(v_n-\sqrt{2})^2}{2v_n}}{\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}(u_n-\sqrt{2})} = \frac{1+u_n}{1-\sqrt{2}}\frac{v_n-\sqrt{2}}{2v_n}t_n$$

10. Ainsi, $t_{n+1} = w_n t_n$ avec $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|w_n| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Par une récurrence, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|t_n| \leqslant \dfrac{|t_{n_0}|}{2^{n-n_0}}$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ainsi $v_n - \sqrt{2} = o(u_n - \sqrt{2})$, ainsi $(v_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$ plus rapidement que $(u_n)_n$.