

Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4. 1. $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

(a) $x \mapsto 1/x$ est continue sur \mathbb{R}^* , de plus \sin est continue sur \mathbb{R} . Donc, par composition d'applications continues, $x \mapsto \sin(1/x)$ est continue sur \mathbb{R}^* . Comme $x \mapsto x^2$ est continue sur \mathbb{R}^* , on en déduit par produit que f est continue sur \mathbb{R}^* .

(b) Montrons la continuité en 0 *i.e.* $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) = 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|x^2 \sin(1/x)| \leq x^2$, on¹ peut donc en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$, par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

2. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* , de plus \sin est dérivable sur \mathbb{R} . Donc, par composition d'applications dérivables, $x \mapsto \sin(1/x)$ est dérivable sur \mathbb{R}^* . Comme $x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R}^* , on en déduit, par produit, que f est dérivable sur \mathbb{R}^* . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$.

3. Pour étudier la dérivabilité de f en 0, calculons le taux d'accroissement. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in [-|x|; |x|]$$

Pour le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4. Si f était de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , alors f' serait continue sur \mathbb{R} donc en 0. Ainsi, d'après le cours, pour toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^n$ tendant vers 0, on aurait $(f'(u_n))_n$ qui tendrait vers $f'(0) = 0$. Choisissons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{2n\pi}$, alors $f'(u_n) = -1$ et donc $(f'(u_n))_n$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que f' n'est pas continue en 0 donc que f n'est pas \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Alors que f est dérivable sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. 1. φ est continue sur le segment $[a; b]$ comme somme de fonctions continues, donc d'après le théorème des bornes atteintes, elle atteint une valeur minimum sur $[a; b]$.

2. Supposons que φ atteigne son minimum en a . Alors pour tout $x \in [a; b]$, $\varphi(x) \geq \varphi(a)$. Remarquons que φ est dérivable sur $[a; b]$ (somme de fonctions dérivables), on a $\varphi'(a) = f'(a) - y < 0$. Comme pour tout $x \in]a; b]$, $\varphi(x) \geq \varphi(a)$, on a $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \geq 0$, par passage à la limite quand $x \rightarrow a$, on a $\varphi'(a) \geq 0$. Ce qui est absurde. Donc φ n'atteint pas son minimum en a . On montre de même que φ n'atteint pas son minimum en b .

3. Ainsi φ atteint son minimum en $c \in]a; b[$ donc² $\varphi'(c) = 0$. Donc $f'(c) - y = 0$. Donc $y = f'(c)$.

4. On a donc montré que quelque soit le point situé entre deux points de $f'(I)$ ce point appartenait encore $f'(I)$. Ceci montre que $f'(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 7.

1. À partir de ce moment-là, vous aurez le droit de dire que comme x^2 tend vers 0, alors $x^2 \sin(1/x)$ aussi. Seulement attention à ne pas dire $|g(x)| \leq h(x)$, or $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$, cela ne marche que pour 0.

2. Rappelons que si f est dérivable sur I admet un minimum en $x \in I$ et que ce minimum n'est pas sur les bords de I , alors on peut dire que $f'(x) = 0$.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

- Correction de l'exercice 11.**
- Soit $x > 0$, on remarque que \exp est continue sur $]0; x[$, dérivable sur $]0; x[$; donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0; x[$ tel que $\exp(x) - \exp(0) = \exp'(c)(x - 0)$, on a donc $e^x = 1 + e^c x$, comme $c \geq 0$ par croissance de l'exponentielle, on a $e^c \geq 1$. Puis, comme $x > 0$, on a donc $e^c x \geq x$, ainsi $e^x \geq 1 + x$.
 - Si $x = 0$, alors on a bien l'inégalité demandée.
 - Si $x < 0$, on remarque que \exp est continue sur $]x; 0[$, dérivable sur $]x; 0[$; donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x; 0[$ tel que $\exp(x) - \exp(0) = \exp'(c)(x - 0)$, on a donc $e^x = 1 + e^c x$, comme $c \leq 0$ par croissance de l'exponentielle, on a $e^c \leq 1$. Puis, comme $x < 0$, on a donc $e^c x \geq x$, ainsi $e^x \geq 1 + x$.

- Correction de l'exercice 12.**
1. Supposons que a soit une racine de multiplicité m de P (alors $m \geq 1$, sinon a n'est pas racine de P). Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$. En dérivant un produit,

$$P' = m(X - a)^{m-1}Q + (X - a)^m Q' = (X - a)^{m-1}(mQ + (X - a)Q')$$

Posons alors $\tilde{Q} = mQ + (X - a)Q'$, alors $\tilde{Q}(a) = mQ(a) \neq 0$ avec $P' = (X - a)^{m-1}\tilde{Q}$. Ceci veut dire que la multiplicité de a dans P' est³ $m - 1$.

2. Soient a et b deux racines de P avec $a \neq b$ (quitte à échanger les noms, on suppose $a < b$). Alors $P(a) = P(b) = 0$. Or, $x \mapsto P(x)$ est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a; b[$ tel que $P'(c) = 0$. Ainsi, P' admet une racine entre deux racines de P .
3. Supposons que P soit scindé à racines simples. Notons (x_1, x_2, \dots, x_n) ses n racines distinctes classées par ordre croissante : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. D'après ce qui précède, pour tout $i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, il existe⁴ $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$. On a alors :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$$

En particulier, $y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1}$. Or, $d^\circ P' = n - 1$ et qu'on a trouvé $n - 1$ racines distinctes de P' , il en découle que P' est scindé à racines simples.

4. Supposons P scindé. Notons (x_1, x_2, \dots, x_r) ces racines distinctes classés par ordre strictement croissant : $x_1 < x_2 < \dots < x_r$. Notons m_i la multiplicité de x_i dans P . Comme P est scindé, $P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. En passant au degré, $n = \sum_{i=1}^r m_i$. D'après la première question, x_i est racine de P' avec multiplicité $m_i - 1$. De plus, comme à la question précédente, on trouve des racines de P' entre les racines de P , il existe y_1, y_2, \dots, y_{r-1} des racines de P' tel que

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r$$

Ainsi, P' est divisible par $\prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i-1} \prod_{i=1}^{r-1} (X - y_i)$. Par conséquent, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P' = Q \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i-1} \prod_{i=1}^{r-1} (X - y_i). \text{ En passant au degré, on obtient :}$$

$$n - 1 = d^\circ P' = d^\circ Q + \sum_{i=1}^r (m_i - 1) + r - 1 = d^\circ Q + \sum_{i=1}^r m_i - \sum_{i=1}^r 1 + r - 1 = d^\circ Q + n - r + r - 1 = n - 1 + d^\circ Q$$

3. Si $m = 1$, cela veut dire que a est une racine de multiplicité 0 dans P' donc que a n'est pas racine de P'

4. C'est dans ce genre d'exercices que l'on réalise à quel point il est important dans Rolle, d'avoir l'existence d'un réel qui annule la dérivée dans l'intervalle ouvert et non dans l'intervalle fermé. En effet, si on avait l'existence de y_1 dans $[x_1; x_2]$ et l'existence de y_2 dans $[x_2; x_3]$, alors rien n'empêcherait d'avoir $y_1 = y_2$ et donc de trouver moins de racines que ce dont on a besoin.

Ainsi, $d^\circ Q = 0$ et Q est constant. Notons λ cette constante⁵. En conclusion,

$$P' = \lambda \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i - 1} \prod_{i=1}^{r-1} (X - y_i)$$

est scindé.

5. Prenons $n \geq 3$. Notons $P = X^n - 1 = \prod_{k=1}^n (X - e^{i \frac{2k\pi}{n}})$ est scindé à racines simples, tandis que $P' = nX^{n-1}$ n'est pas à racines simples, car 0 est racine de multiplicité $n - 1 \geq 2$.

Correction de l'exercice 13.

- Si $n = 1$, on dispose alors de f de classe \mathcal{C}^1 tel que $f(x_0) = f(x_1)$, comme f est continue sur $[x_0; x_1]$, dérivable sur $]x_0; x_1[$, ainsi d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]x_0; x_1[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Si $n = 2$, on dispose alors de f de classe \mathcal{C}^2 tel que $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$. En appliquant le théorème de Rolle sur le segment $[x_0; x_1]$ et sur le segment $[x_1; x_2]$, on obtient qu'il existe $y_0 \in]x_0; x_1[$ tel que $f'(y_0) = 0$ et qu'il existe $y_1 \in]x_1; x_2[$ tel que $f'(y_1) = 0$. Comme $y_0 < y_1$ et que $f'(y_0) = f'(y_1)$, appliquons le théorème de Rolle à la fonction f' et au segment $[y_0; y_1]$, ainsi il existe $c \in]y_0; y_1[$ tel que $(f')'(c) = 0$.
- La figure suivante illustre le cas général (mais c'est une figure et non une preuve).

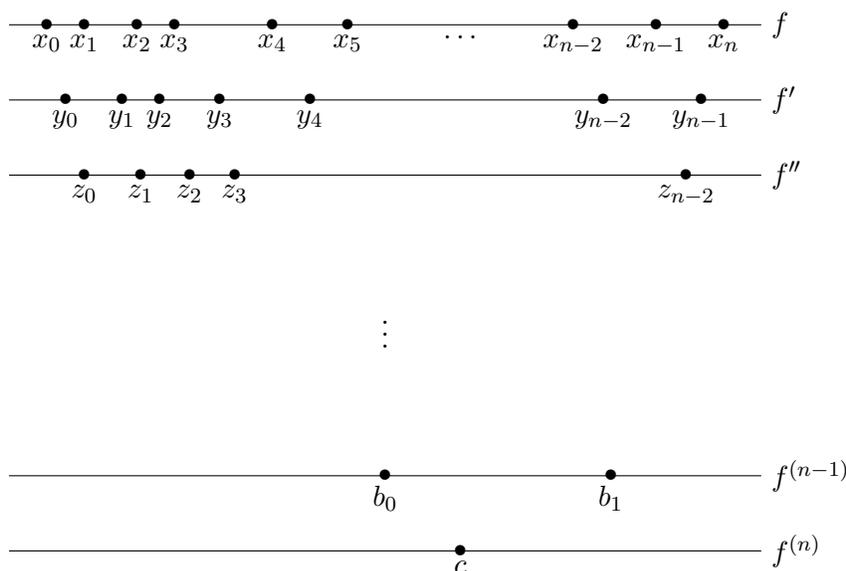


FIGURE 1 – La première ligne représente les réels qui annule f , la deuxième ligne représente les réels qui annule f' par application du théorème de Rolle à f . À chaque dérivée, on obtient un réel en moins qui annule la dérivée en question jusqu'à la dérivée n -ième.

- Généralisons et posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: « pour toute $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'annulant en $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$ ». D'après ce qui précède, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Considérons $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'annulant en $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$. Alors, soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, f est continue sur $[x_i; x_{i+1}]$ dérivable sur $]x_i; x_{i+1}[$ et $f(x_i) = f(x_{i+1})$ d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $f'(y_i) = 0$. On a alors

$$x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \dots < y_n < x_{n+1}$$

En particulier, $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. posons $g = f' \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec g qui s'annule en y_1, y_2, \dots et y_n . En appliquant $\mathcal{P}(n)$ à g , il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g^{(n)}(c) = 0$. Ainsi, $f^{(n+1)}(c) = 0$. Ceci démontre que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

5. On aurait pu aller plus vite en disant qu'on avait des racines telles que la somme des multiplicité était supérieur ou égale à $\sum_{i=1}^r (m_i - 1) + r - 1 \geq n - 1$ et que comme $d^\circ P' = n - 1$, on les a toutes et donc P' est scindé. «Supérieur ou égale» et non pas «égale», car on ne connaît pas la multiplicité des y_i .

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15. Posons $g: x \mapsto f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$. Remarquons que $g(a) = g(b) = 0$. La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in [a; b] \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) - \sup_{c \in [a; b]} f'(c) \leq 0$$

Ainsi, g est décroissante sur $[a; b]$. Pour tout $x \in [a; b]$, $a \leq x \leq b$, donc $0 = g(b) \leq g(x) \leq g(a) = 0$. Ainsi, g est nulle. Dès lors, $f: x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ est une fonction affine.

Correction de l'exercice 16. Présentons deux méthodes. Notons ℓ cette limite finie commune.

1. Première méthode : distinguons plusieurs cas :

- Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$, alors bon ben...
- Soit il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < \ell$.
- Soit il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > \ell$ (traitons que ce cas, en observant que le cas 2 est similaire).

Notons $\varepsilon = \frac{f(x_0) - \ell}{2} > 0$, alors comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$:

$$\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq A \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon = \frac{f(x_0) + \ell}{2} < f(x_0)$$

On remarque donc que $x_0 < A$ (par l'absurde, car sinon, on aurait $f(x_0) > f(x_0)$). De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$:

$$\exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \leq B \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon = \frac{f(x_0) + \ell}{2} < f(x_0)$$

On remarque de même que $x_0 > B$. On a donc $B < x_0 < A$ avec $f(B) < f(x_0)$ et $f(A) < f(x_0)$. Supposons que $f(B) \leq f(A)$. Alors on a $f(B) \leq f(A) < f(x_0)$. Comme f est continue (car dérivable), par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [B; x_0]$ tel que $f(c) = f(A)$, avec $c \leq x_0 < A$.

On applique donc le théorème de Rolle à f sur le segment $[c; A]$. On procède de même si $f(A) \leq f(B)$.

2. Une autre méthode consiste à étudier

$$g: \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(\tan(x)) \end{cases}$$

Par composition de fonctions continues, cette fonction est continue sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. De plus, on observe que par composition de limites, on a que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g(x)$$

Donc g est prolongeable par continuité sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. Notons encore g ce prolongement. On a alors $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ell$. Avec g continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. De plus par composition de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle. Il existe $c \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, tel que $g'(c) = 0$. Or en dérivant g , on a donc que $(1 + \tan^2(c))f'(\tan c) = 0$. En notant $\tilde{c} = \tan c \in \mathbb{R}$ et en remarquant que $1 + \tan^2(c) \neq 0$, on obtient que $f'(\tilde{c}) = 0$.

Correction de l'exercice 17. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est continue sur $[n; n + 1]$, dérivable sur $]n; n + 1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]n; n + 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(n + 1) - f(n)}{(n + 1) - n} = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$$

De plus, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, f' est décroissante sur $[n; n+1]$ donc

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{c}} = f'(c) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Donc,

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. Soit un entier $n \geq 2$. En faisant un décalage d'indice dans la question 1, on obtient :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \quad (1)$$

De plus, on a d'après la question précédente on a pour tout $n \geq 2$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (2)$$

En réunissant les inéquations (1) et (2), on obtient l'égalité voulue pour $n \geq 2$. Pour $n = 1$, il suffit de remplacer par $n = 1$ pour voir que la série d'inégalités demandées tient.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sommons les inégalités précédentes pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} &\leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \\ \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\ 2\sqrt{n+1} - 2 &\leq S_n \leq 2\sqrt{n} \end{aligned}$$

Où on a reconnu des sommes télescopiques⁶.

4. On repart de l'encadrement précédent et on divise par $2\sqrt{n}$.

$$\frac{2\sqrt{n+1} - 2}{2\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leq 1$$

Or⁷, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n+1} - 2}{2\sqrt{n}} = 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$ c'est-à-dire que $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Enfin, puisque des suites équivalentes ont la même limite, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 18. Procédons par analyse-synthèse :

• Analyse : supposons que g existe, alors pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $g(y) = g((\sqrt{y})^2) = f(\sqrt{y})$.

• Synthèse : posons $g: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(\sqrt{x}) \end{cases}$ et on va montrer que ce g là convient :

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x^2) = f(\sqrt{x^2}) = f(|x|) = f(x)$.

— $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, donc par composition, g est continue.

— $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* donc par composition, g est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

De plus,

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$$

6. Si vous avez oublié le calcul des sommes télescopiques, c'est le moment d'aller le réviser.

7. Au fait pourquoi la limite annoncée est-elle vraie ? Si vous ne vous êtes pas posé la question, c'est le signe donc que je pouvais vous escroquer sans problème. Ne vous laissez jamais avoir...

— Comme, f' est dérivable en 0, on a $\lim_{y \rightarrow a} \frac{f'(y) - f'(0)}{y - 0} = f''(0)$ soit $\lim_{y \rightarrow a} \frac{f'(y)}{y} = f''(0)$. Donc par composition de limites avec $y = \sqrt{x}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = f''(0)$. Ceci montre que g' admet une limite en 0^+ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \frac{1}{2}f''(0)$. Ainsi, g est continue sur \mathbb{R}_+ , \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \frac{1}{2}f''(0)$. Ainsi, le théorème de la limite de la dérivée s'applique : g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{2}f''(0)$. Donc g' est continue sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, le g que l'on a posé est bien \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \geq 0$, $g(x^2) = f(x)$.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20. 1. Fixons $t \in]0; a[$. Posons $h: \begin{cases}]0; a[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)g(t) - f(t)g(x) \end{cases}$.

- Alors $h(0) = f(0)g(t) - f(t)g(0) = 0$ et $h(t) = f(t)g(t) - f(t)g(t) = 0$. Donc $h(t) = h(0)$
- h est continue sur $]0; t[$ (comme différence de fonctions qui le sont)
- h est dérivable sur $]0; t[$ (idem)

On peut donc appliquer le théorème de Rolle, il existe $c(t) \in]0; t[$, tel que^{8 9} $h'(c(t)) = 0$. En dérivant h , on obtient donc $f(c(t))g(t) - f(t)g(c(t)) = 0$.

2. Soit $t \in]0; a[$, comme $t > 0$, on a $g(t) \neq 0$. De même $c(t) \in]0; t[$, donc $g(c(t)) \neq 0$. On a donc, par division par des quantités non nulles, $\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(c(t))}{g'(c(t))}$. Or comme $0 < c(t) < t$, par encadrement, on en

déduit que $\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = 0$. Comme on a supposé que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. On peut en déduire, par composition de

limite, que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(c(t))}{g'(c(t))} = \ell$. Nous avons donc démontré que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \ell$. Autrement dit, nous avons levé

l'indéterminée dans la limite de $\frac{f}{g}$ en 0.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24. 1. $d^\circ Q_n = 2n$, donc en dérivant n fois, $d^\circ L_n = 2n - n = n$.

2. $Q_n = (1 - X)^n(1 + X)^n$. Ainsi, 1 et -1 sont racines de Q_n avec multiplicité n . Par caractérisation de la multiplicité, pour tout $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$, $Q_n^{(k)}(1) = 0$ et $Q_n^{(k)}(-1) = 0$.

3. Posons l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(k)$: « $Q_n^{(k)}$ admet au moins k racines réelles distinctes dans $] -1; 1 [$.»

- Pour $k = 0$, il n'y a rien à montrer, «avoir au moins 0 racines»...
- Pour $k = 1$. Comme $Q_n(-1) = Q_n(1) = 0$. Et que $x \mapsto Q(x)$ est continue sur $] -1; 1 [$ et dérivable sur $] -1; 1 [$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_1 \in] -1; 1 [$ tel que $Q'(x_1) = 0$. Dès lors, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. Alors, il existe $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < 1$$

et pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, x_i est racine de $Q_n^{(k)}$. De plus, comme $k \leq n - 1$, -1 et 1 sont racines de $Q_n^{(k)}$ d'après la question 2. Posons $x_0 = -1$ et $x_{k+1} = 1$. Ainsi, $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_k < x_{k+1}$ avec pour tout $i \in \llbracket 0; k + 1 \rrbracket$, $Q(x_i) = 0$. Soit $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, comme $Q_n^{(k)}(x_i) = Q_n^{(k)}(x_{i+1}) = 0$, $x \mapsto Q(x)$ est

8. On le note $c(t)$ et non c car il dépend du t fixé.

9. A priori, $c(t)$ n'est pas unique, il faut donc en choisir un parmi tous les choix possibles. Et comme, on a besoin de faire ce choix pour une infinité de t différents, on a en fait, très subtilement utilisé un axiome controversé pour ça : l'axiome du choix. Controversé car cet axiome mène à des résultats surprenants. Mais rassurez-vous, rien ne tout ça n'est à connaître.

continue sur $]x_i; x_{i+1}[$ dérivable sur $]x_i; x_{i+1}[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $Q_n^{(k+1)}(y_i) = 0$. Ainsi,

$$0 = x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_k < y_k < x_{k+1} = 1$$

Ainsi, y_0, y_1, \dots, y_k sont $k + 1$ racines distinctes de $Q_n^{(k+1)}$ dans $]0; 1[$. Ceci montre que $\mathcal{P}(k + 1)$ vraie.

- Par récurrence finie¹⁰, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(n)$ vraie. En particulier pour $k = n$, $L_n = Q_n^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $] -1; 1[$.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26.

Correction de l'exercice 27. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [0; 1]$. Montrons que¹¹

$$(g \circ f)(ta + (1 - t)b) \leq t(g \circ f)(a) + (1 - t)(g \circ f)(b)$$

Tout d'abord comme f est convexe, on a :

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$$

De plus, comme g est croissante, on a :

$$g(f(ta + (1 - t)b)) \leq g(tf(a) + (1 - t)f(b))$$

Si on pose $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$, on peut alors utiliser la convexité de g et obtenir :

$$(g \circ f)(ta + (1 - t)b) \leq g(t\alpha + (1 - t)\beta) \leq tg(\alpha) + (1 - t)g(\beta) = t(g \circ f)(a) + (1 - t)(g \circ f)(b)$$

On a ainsi montré que $g \circ f$ est une fonction convexe.

Correction de l'exercice 28.

Correction de l'exercice 29. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrons que $f(a) = f(b)$. Supposons par l'absurde que $f(a) \neq f(b)$.

- Supposons que $f(a) < f(b)$. Considérons g , la fonction affine qui coupe f en a et en b , alors $g: x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Comme f est convexe (voir figure 2), f est au-dessus de g en dehors de $[a; b]$. En particulier, pour $x \geq b$, $f(x) \geq g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Par minoration, on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ceci contredit le fait que f soit bornée. Dès lors, $f(a) < f(b)$ n'est pas possible.
- De même, supposons alors $f(a) > f(b)$. Considérons toujours g , la fonction affine qui coupe f en a et en b , alors $g: x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Comme f est convexe (voir toujours figure 2), f est au-dessus de g en dehors de $[a; b]$. En particulier, pour $x \leq a$, $f(x) \geq g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$. Par minoration, on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$. Ceci contredit le fait que f soit bornée. Dès lors, $f(a) > f(b)$ n'est pas possible.

Ainsi, $f(a) = f(b)$. Et ce pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Ceci démontre que f est une fonction constante.

Correction de l'exercice 30. 1. Raisonnons par récurrence avec l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: «pour

$$\text{tout } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n, \text{ pour tout } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in [0; 1]^n, \text{ si } \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \gg$$

10. Il faut bien comprendre ici que l'on doit faire une récurrence finie, car il faut que $k \leq n - 1$ pour pouvoir affirmer que 1 et -1 sont racines de $Q_n^{(k)}$ car après $n - 1$ ce n'est plus le cas.

11. Attention à bien lire l'énoncé, on ne dit pas que f et g sont dérivables (que ce soit une ou deux fois), ainsi il est hors de questions de dériver $g \circ f$.

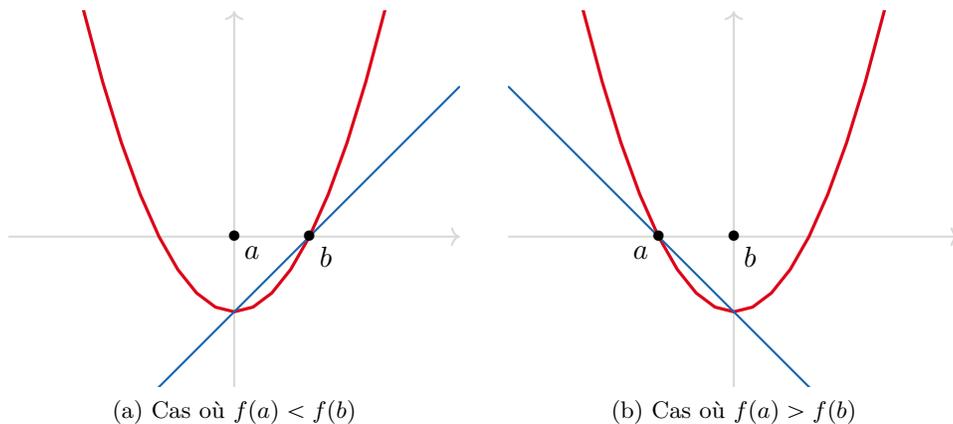


FIGURE 2 – En rouge la fonction f et en bleu la fonction affine g .

- Pour $n = 2$. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in [0; 1]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, alors par convexité de f

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1)f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- Soit un entier $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0; 1]^{n+1}$. Supposons $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

- Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$ or, tous les λ_k sont positifs, donc, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$.

Ainsi,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

Ainsi, l'inégalité demandée est bien vérifiée.

- Si $\lambda_{n+1} < 1$. Alors :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left(\lambda_{n+1} x_{n+1} + \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = f\left(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k\right)\right)$$

Comme f est convexe, on obtient :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k\right)$$

Posons, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mu_k = \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \in [0; 1]$. Remarquons que

$$\sum_{k=1}^n \mu_k = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

Ainsi, on peut appliquer $\mathcal{P}(n)$ au μ_k :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^n \mu_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_k)$$

Dès lors,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

Ceci prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie dans tous les cas.

- Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

2. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$. La fonction $-\ln$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* (sa dérivée seconde est positive). Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_k = 1/n$, de sorte que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Alors, on peut appliquer la question précédente :

$$-\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-\ln(x_k))$$

Multiplions par -1 cette inégalité :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)$$

Comme exponentielle est croissante, on en déduit que :

$$\exp \left(\frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

En reconnaissant une puissance en $1/n$ (et donc une racine n -ième), on peut en conclure que :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

En appliquant ce qui précède non pas à x_k mais à $1/x_k$, on obtient :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$$

En appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur \mathbb{R}_+^* , on obtient :

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{\prod_{k=1}^n x_k}}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$$

3. La moyenne géométrique est plus faible que la moyenne arithmétique cela va faire baisser votre note. En plus cette inégalité devient particulièrement intéressante pour moi si jamais vous avez obtenu un 0 à l'une de vos interrogations.

Correction de l'exercice 31. 1. Soient $a > 0$ et $b > 0$. La fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* , en effet sa dérivée est $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi,

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad \forall t \in [0; 1] \quad \ln(tx + (1-t)x') \geq t \ln(x) + (1-t) \ln(x') = \ln(x^t x'^{1-t})$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient :

$$x^t x'^{1-t} \leq tx + (1-t)x'$$

Posons alors $x = a^p > 0$, $x' = b^q > 0$ et $t = 1/p \in]0; 1[$. Ainsi, $1-t = 1 - 1/p = 1/q$ par conséquent :

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

2. Commençons par remarquer que l'inégalité démontrée à la première question est encore vraie si $a = 0$ ou $b = 0$. Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ tels que $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = \sum_{i=1}^n |y_i|^q = 1$, alors, d'après la question précédente

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |x_i y_i| = |x_i| \times |y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}$$

Par somme, on a donc

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q$$

On a donc démontré ce qu'il fallait dans le cas où $\|x\|_p = 1$ et $\|y\|_q = 1$. Dans le cas général, remarquons déjà $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \times \|x\|_p$. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si $x = (0, 0, \dots, 0)$ ou $y = (0, 0, \dots, 0)$ il n'y a rien à faire. Supposons $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Dans ce cas on pose $\tilde{x} = x/\|x\|_p$ et $\tilde{y} = y/\|y\|_q$, alors $\|\tilde{x}\|_p = 1$ et $\|\tilde{y}\|_q = 1$. On peut donc appliquer ce qui précède à \tilde{x} et \tilde{y} .

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x\|_p} \times \frac{y_i}{\|y\|_q} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \times \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq 1$$

En multipliant par $\|x\|_p \times \|y\|_q$ on obtient le résultat.

3. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, en appliquant l'inégalité précédente, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \times \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} &\leq \|x\|_p + \|y\|_p \\ \|x + y\|_p &\leq \|x\|_p + \|y\|_p \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32.

Correction de l'exercice 33.

Correction de l'exercice 34. 1. Notons $f: x \mapsto x^{2n}$.

- En connaissant les dérivées k -ième des fonctions de la forme $x \mapsto x^p$ on peut dire que pour $k \leq 2n$, $f^{(k)}: x \mapsto \frac{(2n)!}{(2n-k)!} x^{2n-k}$.
- De plus, en notant $g: x \mapsto x^n$, on a $f = g \times g$, appliquons la formule de Leibniz. Pour $k \leq n$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} g^{(i)}(x) \times g^{(k-i)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i} \times \frac{n!}{(n-(k-i))!} x^{n-(k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{(n!)^2}{(n-i)!(n-k+i)!} x^{2n-k} \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(2n)!}{(2n-k)!} x^{2n-k} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{(n!)^2}{(n-i)!(n-k+i)!} x^{2n-k}$$

2. Prenons $k = n$ et prenons $x = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{(2n-n)!} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(n!)^2}{(n-i)!(n-n+i)!} \\ \frac{(2n)!}{n!} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \times n! \\ \frac{(2n)!}{(n!)^2} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \\ \binom{2n}{n} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu ¹²

Correction de l'exercice 35.

Correction de l'exercice 36. Pour cela, raisonnons par récurrence, on va poser dans l'hypothèse de récurrence que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on va aussi supputer la forme de la dérivée n -ième pouvoir la dériver. Pour, $n \in \mathbb{N}$, posons donc l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathcal{P}(n): \langle f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists (P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2 \text{ tel que } \forall x > 0 \quad Q_n(x) \neq 0 \text{ et } f^{(n)}: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{cases} \rangle$$

- Initialisation : Il faut montrer que f est continue sur \mathbb{R} et trouver P_0 et Q_0 tel que

$$f^{(0)} = f =: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{P_0(x)}{Q_0(x)} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tout d'abord f est continue sur \mathbb{R}_-^* en tant que fonction nulle, elle est continue sur \mathbb{R}_+^* par composition de fonctions continues. Il reste à étudier le problème en 0. Pour cela, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, de plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, or $f(0) = 0$. Ainsi, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, ainsi f est continue en 0.

Donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Enfin, posons $Q_0 = P_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$ et ces polynômes conviennent au vu de f .

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, montrons $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$. Supposons donc $\mathcal{P}(n)$ vraie. Ainsi

$$f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists (P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2 \text{ tel que } \forall x > 0 \quad Q_n(x) \neq 0 \text{ et}$$

- $f^{(n)}$ est clairement de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_-^* et de dérivée nulle
- $f^{(n)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* par composition et produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

12. On peut donner une interprétation de ce résultat : imaginons un groupe de $2n$ personnes composé de n hommes et n femmes. Combien peut-on former de sous-groupes à n personnes dans ce groupe ? $\binom{2n}{n}$ bien sûr. Mais aussi, on peut imaginer, que dans un tel groupe, on a appelé i le nombre de femmes, ainsi il y a $\binom{n}{i}$ choix possibles pour les femmes. Dans ce cas il reste à choisir $n-i$ hommes parmi n hommes, soit $\binom{n-i}{n-i} = \binom{n}{i}$ possibilités. On a ainsi $\binom{n}{i}^2$ groupes à i fixé. Maintenant i peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et n , on obtient donc $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$ possibilités. D'où l'égalité.

— Mettons provisoirement de côté, le problème du caractère \mathcal{C}^1 en 0. Dérivons $f^{(n)}$ sur \mathbb{R}_+^* . On a :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad (f^{(n)})'(x) &= e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + \frac{P_n'(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_n'(x)}{(Q_n(x))^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{P_n(x)Q_n(x) + x^2 P_n'(x)Q_n(x) - x^2 P_n(x)Q_n'(x)}{x^2 Q_n(x)^2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi on pose les deux polynômes suivants :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n(X)Q_n(X) + X^2 P_n'(X)Q_n(X) - X^2 P_n(X)Q_n'(X) \in \mathbb{R}[X] \\ Q_{n+1} &= X^2 Q_n(X)^2 \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

Alors Q_{n+1} ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^* et on a bien, pour tout $x > 0$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}(x)e^{-\frac{1}{x}}$.

— Revenons maintenant au problème en 0, $f^{(n)}$ est continue (par hypothèse de récurrence), on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f^{(n)})'(x) = 0$ et par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f^{(n)})'(x) = 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $(f^{(n)})'(0) = 0$, de plus, on a $\lim_{x \rightarrow 0} (f^{(n)})'(x) = 0 = (f^{(n)})'(0)$, on a donc la continuité en 0 de $(f^{(n)})'$.

On a donc montré que $f^{(n)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , autrement dit, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que

$$f^{(n+1)}: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+1}(x)} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

On a donc montré que $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

- Par principe de récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 37.