Exercice : ne vous perdez pas dans la cinquième dimension !

1. Remarquons que $\mathscr{B}_F = ((1,2,3,4,5),(0,0,0,1,1))$ est une famille génératrice de F. De plus, cette famille contient exactement deux vecteurs et ces vecteurs sont non colinéaires, ainsi, $\mathscr{B}_F$ est une famille libre de F. Dès lors, $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Donc, $\dim(F) = |\mathscr{B}_F| = 2$
2. Soit $p = (x,y,z,t,v) \in \mathbb{R}^5$, alors

$$\begin{aligned}
p \in G \quad & \iff \quad \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z+t+v & = & 0 \\ y+2v & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -y-z-t-v \\ y & = & -2v \end{array}\right. \\
& \iff \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -z-t+v \\ y & = & -2v \end{array}\right. \iff p = (-z-t+v,-2v,z,t,v) \\
& \iff \quad p = z(-1,0,1,0,0)+t(-1,0,0,1,0)+v(1,-2,0,0,1) \\
& \iff \quad p \in \operatorname{vect}((-1,0,1,0,0),(-1,0,0,1,0),(1,-2,0,0,1))
\end{aligned}$$

   Dès lors, posons $\mathscr{B}_G = ((-1,0,1,0,0),(-1,0,0,1,0),(1,-2,0,0,1))$, ainsi, $G = \operatorname{vect}(\mathscr{B}_G)$, G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$, et $\mathscr{B}_G$ est une famille génératrice de G. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons

$$a(-1,0,1,0,0)+b(-1,0,0,1,0)+c(1,-2,0,0,1) = 0_{\mathbb{R}^5}$$

   Donc $(c-a-b,-2c,a,b,c) = (0,0,0,0,0)$. Par identification des 5-uplets, $a=0$, $b=0$ et $c=0$. Dès lors, $\mathscr{B}_G$ est une famille libre de $\mathbb{R}^5$. Par conséquent, $\mathscr{B}_G$ est une base de G. En conclusion, $\dim(G) = |\mathscr{B}_G| = 3$
3. Soit $p \in F \cap G$. Alors $p \in F$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$p = a(1,2,3,4,5)+b(0,0,0,1,1) = (a,2a,3a,4a+b,5a+b)$$

   De plus, $p \in G$ donc $a+2a+3a+(4a+b)+(5a+b) = 2a+2(5a+b) = 0$. On obtient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2b+12a & = & 0 \\ 2b+15a & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{lcl} 2b+12a & = & 0 \\ 3a & = & 0 \end{array}\right. \iff a=b=0$$

   Dès lors, $p = 0_{\mathbb{R}^5}$. Ceci montre que $F \oplus G$. De plus, $\dim(F)+\dim(G) = 2+3 = 5 = \dim(\mathbb{R}^5)$. Ceci montre que F et G sont supplémentaires.

Exercice : ne vous perdez pas dans la matrice !

1. $\dim(\mathscr{M}_3(\mathbb{R})) = 3 \times 3 = 9$.
2. • $E_1(A) \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (ensemble défini par compréhension).
   • Remarquons que si $M = 0_3$, alors $AM = A0_3 = 0_3 = M$. Donc, $0_3 \in E_1(A)$.
   • Soient $(M,N) \in E_1(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par distributivité, $A(\lambda M+N) = \lambda AM + AN = \lambda M + N$. Donc, $\lambda M + N \in E_1(A)$.

   Par conséquent, $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in E_1(A)$, alors $AM = M$, dès lors, $A^2M = A(AM) = AM$. Ceci montre que $M \in E_2(A)$. Par conséquent, $E_1(A) \subset E_2(A)$.
4. Supposons A inversible. Soit $M \in E_2(A)$, alors $A^2M = AM$, en multipliant à gauche par A^{-1}, alors $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$, soit $I_3AM = I_3M$ donc $AM = M$, donc $M \in E_1(A)$, on a montré que $E_2(A) \subset E_1(A)$ et d'après la question précédente, $E_1(A) \subset E_2(A)$. Par double inclusion, $E_1(A) = E_2(A)$.
5. Supposons $A - I_3$ inversible. Soit $M \in E_1(A)$, alors $AM = M$, donc $AM - I_3M = 0_3$, par distributivité, il en découle que $(A-I_3)M = 0_3$, en multipliant par $(A-I_3)^{-1}$, il vient

$$(A-I_3)^{-1}(A-I_3)M = (A-I_3)^{-1}0_3$$

   D'où, $M = 0_3$. On a donc montré que, $E_1(A) \subset \{0_3\}$. Comme $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'inclusion réciproque est vérifiée. Ainsi, $E_1(A) = \{0_3\}$.

6. Remarquons que $B-I_3=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Ainsi, $B-I_3$ est inversible. D'après la question précédente, $E_1(B)=\{0_3\}$. De plus, B est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls, donc B est inversible. D'après la question 4, $E_2(B)=E_1(B)=\{0_3\}$.

7.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$L_2\leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\substack{L_2\leftarrow -L_2\\L_3\leftarrow -L_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$L_1\leftarrow L_1-L_2-L_3$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

8.

$$D=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix}3&-2&-1\\1&0&-1\\2&-2&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

9. Soit $N=\begin{pmatrix}x&y&z\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors $DN=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\2d&2e&2f\end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$N\in E_1(D)\iff DN=N\iff\left\{\begin{array}{lll}x&=&0\\y&=&0\\z&=&0\\a&=&a\\b&=&b\\c&=&c\\d&=&2d\\e&=&2e\\f&=&2f\end{array}\right.\iff x=y=z=d=e=f=0\iff N=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Par conséquent, pour $N\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $N\in E_1(D)$ ssi il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $N=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}$.

10. D'après la question précédente :

$$E_1(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ aE_{2,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{vect}(E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$$

Où on a noté $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant un 1 à la i-ième ligne et j-ième colonne. Par conséquent, $\mathscr{B}_D = (E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une famille génératrice de $E_1(D)$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $aE_{2,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} = 0_3$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$, par conséquent, $\mathscr{B}_D$ est une famille libre. Donc, $\mathscr{B}_D$ est une base de $E_1(D)$. Donc, $\dim(E_1(D)) = |\mathscr{B}_D| = 3$.

11. Remarquons que comme $D = P^{-1}CP$, on a aussi $PDP^{-1} = C$
   - Supposons que $M \in E_1(C)$, alors $DN = P^1CPP^{-1}M = P^{-1}CM = P^{-1}M = N$, donc $N \in E_1(D)$.
   - Supposons que $N \in E_1(D)$, alors $CM = PDP^{-1}PN = PDN = PN = M$ donc $M \in E_1(C)$.

   Par double implication, $M \in E_1(C)$ ssi $N = P^{-1}M \in E_1(D)$

12. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors $M \in E_1(C)$ ssi $P^{-1}M \in E_1(D)$ ssi il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ssi il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} E_1(C) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, posons $\mathscr{B}_C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $\mathscr{B}_C$ est une famille génératrice de $E_1(C)$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Donc $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$, comme deux matrices sont égales ssi elles ont les mêmes coefficients, on obtient $a = b = c = 0$, donc $\mathscr{B}_C$ est une famille libre. Par conséquent, $\mathscr{B}_C$ est une base de $E_1(C)$. Dès lors, $\dim(E_1(C)) = |\mathscr{B}_C| = 3$

13. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors $M \in E_2(C)$ ssi $C^2M = CM$ ssi $(PDP^{-1})^2M = PDP^{-1}M$ ssi $PDP^{-1}PDP^{-1}M = PDP^{-1}M$ ssi $PD^2P^{-1}M = PDP^{-1}M$ ssi $D^2N = DN$ Où on a noté $N = P^{-1}M$ la dernière équivalence étant obtenue en multipliant à gauche par P ou P^{-1}. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors,

$$N \in E_2(D) \text{ ssi } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

ssi $g=h=i=0$. Ainsi, $E_2(D)=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \mid (a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6\right\}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} E_2(C) &= \left\{P\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \mid (a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f\\ a+d & b+e & c+f\\ a & b & c\end{pmatrix} \mid (a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6\right\}\\ &= \text{vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)}_{\mathscr{B}'_C}\end{aligned}$$

On obtient ainsi, $\mathscr{B}'_C$ une famille génératrice de $E_2(C)$. Soit $(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6$. Supposons que la combinaison linéaire de ces six matrices avec les scalaires a, b, c, d, e et f est la matrice nulle. On a alors $\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f\\ a+d & b+e & c+f\\ a & b & c\end{pmatrix}=0_3$. Alors, grâce à la dernière ligne, on obtient $a=b=c=0$, en utilisant la première ligne, on obtient $d=e=f=0$. Par conséquent, $\mathscr{B}'_C$ est une famille libre de $E_2(C)$. Dès lors, $\mathscr{B}'_C$ est une base de $E_2(C)$. Donc, $\dim(E_2(C))=|\mathscr{B}'_C|=6$. Comme $\dim(E_1(C))\neq\dim(E_2(C))$ on en conclut que $E_1(C)\neq E_2(C)$.

14. Posons $S=\text{vect}(E_{1,1},E_{1,2},E_{1,3},E_{3,1},E_{3,2},E_{3,3})$.
   - S est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
   - Soit $M=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors,

$$M=\underbrace{dE_{2,1}+eE_{2,2}+fE_{2,3}}_{\in E_1(D)}+\underbrace{aE_{1,1}+bE_{1,2}+cE_{1,3}+gE_{3,1}+hE_{3,2}+iE_{3,3}}_{\in S}$$

     Ainsi, $E_1(D)+S=\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   - Soit $M\in E_1(D)\cap S$. Alors, il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et il existe $(d,e,f,g,h,i)\in\mathbb{R}^6$ tel que $M=dE_{1,1}+eE_{1,2}+fE_{1,3}+gE_{3,1}+hE_{3,2}+iE_{3,3}=\begin{pmatrix} d & e & f\\ 0 & 0 & 0\\ g & h & i\end{pmatrix}$. Par unicité des coefficients d'une matrice, $a=b=c=0$, donc $M=0_3$. Par conséquent, $E_1(D)\cap S\subset\{0_3\}$, l'autre inclusion est vraie, ainsi, $E_1(D)$ et S sont en somme directe.

   Par conséquent, S est bien un supplémentaire de $E_1(D)$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice : ne vous perdez pas dans vos limites !

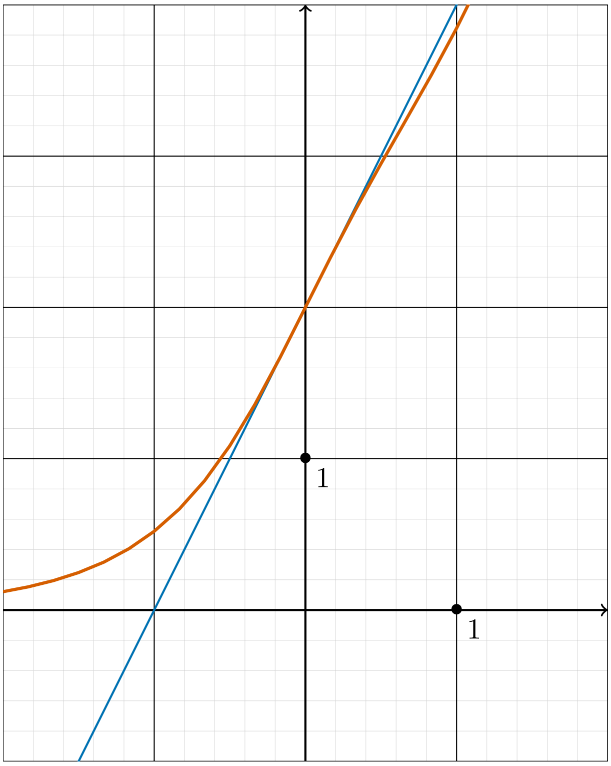
1. $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)\right)\dfrac{x^k}{k!}+\mathcal{O}(x^n)$
2. Comme $1+t^2\underset{+\infty}{\sim}t^2$ et que les équivalents sont conservés par passage à l'exposant, $\sqrt{1+t^2}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{t^2}=t$ (on est au voisinage de $+\infty$, donc on peut prendre $t>0$).
3. $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}}\underset{0}{=}(1+u)^{-1/2}=1-\dfrac{u}{2}+\dfrac{-\frac{1}{2}\times(-\frac{3}{2})}{2}u^2+\mathcal{O}(u^2)$. On pose $u=t^2$, de sorte que $u^2=t^4=\mathcal{O}(t^3)$ et $\mathcal{O}(u^2)=\mathcal{O}(t^3)$, ainsi, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\underset{0}{=}1-\dfrac{t^2}{2}+\mathcal{O}(t^3)$. Ainsi,

$$f(t)\underset{0}{=}2\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\mathcal{O}(t^3)\right)\left(1-\frac{t^2}{2}+\mathcal{O}(t^3)\right)=2\left(1+t+t^3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)+\mathcal{O}(t^3)\right)=2+2t-\frac{2}{3}t^3+\mathcal{O}(t^3)$$

4. Par troncature du développement limité trouvé à la question précédente à l'ordre 1, on en déduit que la courbe représentative de $T\colon t \mapsto 2+2t$ est la tangente de f en 0. De plus,

$$f(x) - T(x) \underset{0}{=} -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{2}{3}x^3$$

Or deux fonctions équivalentes en 0 ont le même signe au voisinage de 0. Ainsi, pour $x > 0$, $f(x) - T(x) < 0$ sur un voisinage de 0 à droite. Donc, la fonction est en dessous de sa tangente en 0 sur un voisinage à droite de 0. Pour $x < 0$, $f(x) - T(x) > 0$ sur un voisinage de 0 à gauche. Donc, la fonction est au dessus de sa tangente en 0 sur un voisinage à gauche de 0.



5. Les équivalents étant conservés par le quotient, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^t}{t^2}$, or deux fonctions équivalents ont même limite et par croissance comparée, $\frac{e^t}{t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, donc $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. De plus, $e^t \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ et $\sqrt{1+t^2} \xrightarrow[t\to-\infty]{} +\infty$, par quotient, $f(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$.

6. La fonction $t \mapsto 1+t^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est une fonction strictement positive, $\sqrt{\ }$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas. Ainsi, f est un quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \frac{2e^t\sqrt{1+t^2} - 2e^t\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{2e^t}{1+t^2}\left(\sqrt{1+t^2} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{2e^t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\left(1+t^2-t\right)$$

Remarquons que $X^2 - X + 1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut -3, ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2-t > 0$, de sorte que $f'(t) > 0$. Dès lors, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme elle est continue, on en déduit que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{t\to-\infty} f(t)\,;\lim_{t\to+\infty} f(t)\right[= \left]0\,;+\infty\right[= \mathbb{R}_+^*$$

7.
   - Posons, $g\colon t \mapsto 2e^t - t^2 - t$, remarquons que, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $g''\colon t \mapsto 2e^t - 2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, ainsi, g est convexe sur $\mathbb{R}_+$, ainsi. Par conséquent, g est au dessus de sa tangente en 0 sur $\mathbb{R}_+$. donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) \geqslant g(0) + g'(0)t = 2 + t \geqslant 2$, dès lors, $2e^t - t^2 - t > 0$.
   - Pour $t \geqslant 0$, $1 + t = \sqrt{(1+t)^2} = \sqrt{1+2t+t^2} \geqslant \sqrt{1+t^2}$ (car $\sqrt{\ }$ est croissante).

8. Soit $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, en utilisant les inégalités démontrées à la question précédente :

$$f(t)-t=\frac{2\mathrm{e}^{t}-t\sqrt{1+t^{2}}}{\sqrt{1+t^{2}}}\geqslant\frac{2\mathrm{e}^{t}-t(1+t)}{\sqrt{1+t^{2}}}=\frac{2\mathrm{e}^{t}-t^{2}-t}{\sqrt{1+t^{2}}}>0$$

9. Remarquons que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par f et $u_0 \in \mathbb{R}_+$, de plus, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que la suite récurrente pour la fonction f, $(u_n)_n$ est monotone, or $u_1 = f(u_0) > u_0$ d'après la question précédente, ainsi, $(u_n)_n$ est croissante. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors comme $u_n \geqslant 0$ et que les inégalités sont conservées par passage à la limite, $\ell \geqslant 0$, comme f est continue en ℓ, on en déduit que $f(\ell) = \ell$, ce qui est absurde d'après la question précédente. Dès lors, $(u_n)_n$ ne converge pas. Or, comme elle est croissante, le théorème de la limite monotone s'applique, et il n'y a que deux alternatives : $(u_n)_n$ converge ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi, nécessairement, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

10.
```python
import numpy as np

def Seuil(A):
    n=0
    u=1
    while u<A:
        u=2*np.exp(u)*(1+u*u)**(-1/2)
        n=n+1
    return n
```

11. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors en se souvenant, que l'on multiplie une intégrale par -1 en inversant ses bornes : $G(-x) = \displaystyle\int_x^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = -G(x)$. Dès lors, G est impaire.

12. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet une primitive. Notons, F une primitive de f. Soit $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - F(-x)$. Or, F est dérivable et, par composée, $x \mapsto F(-x)$ aussi, par somme de fonctions dérivables, G est dérivable et

$$G'(x)=F'(x)+F'(-x)=f(x)+f(-x)=\frac{4\mathrm{ch}(x)}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

par quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (dont le dénominateur ne s'annule pas), G' est continue. Par conséquent, G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

13. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, remarquons que, d'après la relation de Chasles, $G(x) = \displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Or, comme f est positive, on en déduit, par positivité de l'intégrale, que $\displaystyle\int_{-x}^{0} f \geqslant 0$. Pour tout $t \in [\,0\,;x\,]$, $f(t) \geqslant t$, on en déduit par croissance de l'intégrale que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $G(x) \geqslant 0 + \dfrac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, ainsi, par théorème de comparaison, $G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.