DS6

16 mars 2024

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Exercice : ne vous perdez pas dans la cinquième dimension !

On pose $F = \mathrm{vect}((1,2,3,4,5),(0,0,0,1,1))$ et $G = \left\{(x,y,z,t,v) \in \mathbb{R}^5 \mid x+y+z+t+v = y+2v = 0\right\}$.

1. Déterminer la dimension de F.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ et déterminer la dimension de G.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice : ne vous perdez pas dans la matrice !

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées ayant trois lignes et trois colonnes, I_3 la matrice identité et 0_3 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On considère, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\}$$
$$E_2(A) = \left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\right\}$$

1. Rappeler sans preuve la dimension de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On admet que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (se montre de la même façon).

3. Établir que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
4. Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$
5. Établir que si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0_3\}$.
6. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de ce qui précède les ensembles $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

On considère $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
8. On pose $D = P^{-1}CP$, calculer D.
9. Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement si il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
10. En déduire une base de $E_1(D)$ puis sa dimension.
11. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$. Montrer que $M \in E_1(C)$ si et seulement si $N \in E_1(D)$.
12. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
13. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$. Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?
14. Proposer un supplémentaire de $E_1(D)$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice : ne vous perdez pas dans vos limites !

1. Rappeler le $DL_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer un équivalent simple de $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ en $+\infty$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^t}{\sqrt{1+t^2}}$

3. Déterminer le $DL_3(0)$ de f en 0.
4. Déterminer un équivalent simple de $f(x) - T(x)$ en 0 puis en déduire, sur un voisinage de 0, la position de la tangente par rapport à f où T est la fonction dont la courbe est la tangente de f en 0.
5. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer.
7. Montrer que, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, $2\mathrm{e}^t - t - t^2 > 0$ et $1 + t \geqslant \sqrt{1+t^2}$.
8. En déduire que, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, $f(t) > t$.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$ puis montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
10. Écrire une fonction Python `Seuil(A:float)->int` qui renvoie le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant A$. *On pourra utiliser la fonction `exp` de la bibliothèque `numpy` à condition d'avoir importé cette bibliothèque de façon adéquate.*

On considère l'application $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

11. Montrer que G est impaire.
12. Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
13. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque $x \to +\infty$?