Correction de l'exercice 1. La base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ et celle de $\mathbb{C}_3[X]$ est $\mathscr{C} = (1, X, X^2, X^3)$. Ainsi,

- $\Phi_1(1) = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3$
- $\Phi_1(X) = 1 = 1 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3$
- $\Phi_1(X^2) = 2X = 0 \times 1 + 2 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3$
- $\Phi_1(X^3) = 3X^2 = 0 \times 1 + 0 \times X + 3 \times X^2 + 0 \times X^3$
- $\Phi_1(X^4) = 4X^3 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 + 4X^3$

Par conséquent,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\Phi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. La base canonique de $\mathbb{R}$ est $\mathscr{C} = (1)$. Ainsi,

- $\Phi_2(1) = 1 = 1 \times 1$
- $\Phi_2(X) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \times 1$
- $\Phi_2(X^2) = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \times 1$
- $\vdots$
- $\Phi_2(X^i) = \dfrac{1}{i+1}$
- $\vdots$
- $\Phi_2(X^n) = \dfrac{1}{n+1}$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\Phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{i+1} & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2.

1. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Notons $u = (x, y, z)$, alors $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Notons $v = h(x, y, z)$, et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$, alors d'après le cours
$$Y = AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$
Ainsi, $v = h((x, y, z)) = ye_1 + (-z)e_2 + (-x)e_3 = (y, -z, -x)$. Dès lors $h((x, y, z)) = (y, -z, -x)$.
2. En regardant la première colonne, on obtient $h(e_1) = 0 \times e_1 + 0 \times e_2 + (-1) \times e_3 = -e_3$. Donc $h^2(e_1) = h(-e_3) = -h(e_3) = e_2$ (en effet, en regardant la dernière colonne $h(e_3) = -e_2$. De même, $h^2(e_2) = -e_3$ et $h^3(e_3) = -e_1$
3. $h^3(e_1) = h(h^2(e_1)) = h(e_2) = e_1$. De même $h^3(e_2) = e_2$ et $h^3(e_3) = e_3$.
4. h^3 et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ coïncident sur une base de $\mathbb{R}^3$ donc sont égales, ainsi $h^3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
5. En calculant A^3, on obtient $A^3 = I_3$ (à faire). Ainsi, comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h)$, on a $A^3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h^3) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Comme on sait d'après le cours, que $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est un isomorphisme entre $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, cette application est injective, on en déduit que $h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Correction de l'exercice 3. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/Cm3bJSaGiGI

Correction de l'exercice 4. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/WjGFh1kCvgw

Correction de l'exercice 5. Tout d'abord vérifions que les deux sous-espaces vectoriels en question sont bien supplémentaires.

- Notons $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x - y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}((1,1,1))$. Alors $F = \mathrm{Ker}(\phi)$ où $\phi\colon (x,y,z) \mapsto x - y + z$, comme ϕ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, ainsi $\dim(F) = 2$.
- De plus, $((1,1,1))$ est une famille génératrice de G. De plus, elle est libre (un seul vecteur non nul). Dès lors $((1,1,1))$ est une base de G, donc $\dim(G) = 1$.
- Soit $p = (x,y,z) \in F \cap G$. Alors $x - y + z = 0$ et il existe λ tel que $p = (x,y,z) = \lambda(1,1,1) = (\lambda,\lambda,\lambda)$, par identification, $x = y = z = \lambda$. Donc $x - y + z = \lambda - \lambda + \lambda = 0$. Donc $\lambda = 0$, donc $p = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi $F \oplus G$.

Ainsi, F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en somme directe et $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et p la projection sur F parallèlement à G. Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe $f \in F = \mathrm{vect}((1,1,0),(0,1,1))$ et $g \in G$ tel que $e_1 = f + g$. Comme $f \in F$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $f = a(1,1,0) + b(0,1,1) = (a, a+b, b)$. Comme $g \in G$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g = c(1,1,1) = (c,c,c)$. Donc

$$e_1 = (1,0,0) = f + g = (a+c, a+b+c, b+c)$$

D'après résolution du système, on trouve $a = 0$, $b = -1$ et $c = 1$. Donc

$$p(e_1) = f = (0,-1,-1) = 0e_1 + -1e_2 + (-1)e_3$$

De même, on calcule $p(e_2) = (1,2,1) = 1e_1 + 2e_2 + 1e_3$ et $p(e_3) = (-1,-1,0) = (-1)e_1 + (-1)e_2 + 0e_3$. Donc $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6.

1. Comme $F = \mathrm{vect}(f_1, f_2, f_3)$, (f_1, f_2, f_3) est une famille génératrice de F. Montrons la liberté. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, supposons $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0_E$ (fonction nulle). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = 0_E$. D'où,
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{2x} + c\mathrm{e}^{3x} = 0$$
En divisant par $\mathrm{e}^{3x} \neq 0$, on a $a\mathrm{e}^{-2x} + b\mathrm{e}^{-x} + c = 0$. En faisant tendre $x \to +\infty$, on obtient $0 + 0 + c = 0$. Ainsi, $c = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{2x} = 0$, en divisant par $\mathrm{e}^{2x} \neq 0$, il vient, $a\mathrm{e}^{-x} + b = 0$. À nouveau en faisant tendre $x \to +\infty$, il vient $0 + b = 0$. Donc $b = 0$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a\mathrm{e}^{x} = 0$. Avec $x = 0$, on a $a = 0$. D'où $a = b = c = 0$. Ainsi, (f_1, f_2, f_3) est une famille libre. Ainsi, $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de F. Dès lors, $\dim(F) = |\mathscr{B}| = 3$.
2. Soit $(f,g) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)'' + (\lambda f + g)' + 2(\lambda f + g) = \lambda f'' + g'' + \lambda f' + g' + 2\lambda f + 2g \\ &= \lambda(f'' + f' + 2f) + (g'' + g' + 2f) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g) \end{aligned}$$
Ainsi, φ est linéaire. De plus, comme $f \in F$, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $f = af_1 + bf_2 + cf_3$. Ainsi, $\varphi(f) = a\varphi(f_1) + b\varphi(f_2) + c\varphi(f_3)$. Or
   - $\varphi(f_1) = f_1'' + f_1' + 2f_1 = 4f_1$
   - $\varphi(f_2) = f_2'' + f_2' + 2f_2 = 8f_2$
   - $\varphi(f_3) = f_3'' + f_3' + 2f_3 = 14f_3$

   Ainsi, $\varphi(f) = 4af_1 + 8bf_2 + 14cf_3 \in F$. Dès lors, $\varphi(f) \in F$, comme φ est linéaire, on en déduit que $\varphi \in \mathscr{L}(F)$.
3. Notons $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$, alors d'après les calculs précédents
   - $\varphi(f_1) = 4f_1 = 4f_1 + 0f_2 + 0f_3$
   - $\varphi(f_2) = 8f_2 = 0f_1 + 8f_2 + 0f_3$
   - $\varphi(f_3) = 14f_3 = 0f_1 + 0f_2 + 14f_3$

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

4. En tant que matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont non nuls, A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$, d'après le cours, on en déduit que φ est un automorphisme et que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

5. Posons $g = f_2 - f_3$. Le but de la question est de trouver $f \in F$ tel que $\varphi(f) = g$. Comme φ est bijective, on pose donc $f = \varphi^{-1}(g)$. Posons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$. Comme $g = 0f_1 + 1f_2 + (-1)f_3$, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En notant $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et en appliquant le cours, on a $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1})X$. Par produit matriciel, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $f = 0f_1 + \frac{1}{8}f_2 - \frac{1}{14}f_3$. Et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) + f'(x) + 2f(x) = g(x) = f_2(x) - f_3(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x}$$

Correction de l'exercice 7. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, supposons que $a(0, 0, 0, 1) + b(0, 0, 1, 1) + c(0, 1, 1, 1) + d(1, 1, 1, 1) = 0_{\mathbb{R}^4}$. On a donc $(d, c + d, d + c + b, d + c + b + a) = (0, 0, 0, 0)$. Par identification $d = c + d = b + c + d = a + b + c + d = 0$. Donc $a = b = c = d = 0$. Dès lors $\mathscr{B}'$ est libre, or $|\mathscr{B}'| = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Dès lors, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Comme $x = 1e_2 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$ avec $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Notons $P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on a alors

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le cours, on a $X = PX'$. Il existe alors deux méthodes :

- Soit on inverse P (par la méthode de Gauss-Jordan), et on trouve que $X' = P^{-1}X$ et on n'a plus qu'à faire un produit matriciel.
- Soit on note $X' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et on résout le système linéaire $PX' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Après résolution (vérifiez les calculs), on trouve $x = y = z = t = 1$. Donc $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8. 1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y) + (x', y')) &= f((\lambda x + x', \lambda y + y')) \\ &= (2(\lambda x + x') - 3(\lambda y + y'), (\lambda x + x') + (\lambda y + y'), 5(\lambda x + x') - (\lambda y + y')) \\ &= \lambda(2x - 3y, x + y, 5x - y) + (2x' - 3y', x' + y', 5x' - y') = \lambda f(x, y) + f(x', y') \end{aligned}$$

Donc f est linéaire, de plus $f(1,0)=(2,1,5)$ et $f(0,1)=(-3,1,-1)$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)=\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\\5&-1\end{pmatrix}$

2. Consitituée de deux vecteurs non colinéaires, $\mathscr{B}'$ est libre, de plus $|\mathscr{B}'|=2=\dim(\mathbb{R}^2)$. D'où, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$, de plus $P=P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$.

3. Montrons que $\mathscr{C}'$ est libre, soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, supposons $a(1,0,1)+b(1,-1,1)+c(2,1,-2)=(0,0,0)$, on obtient $(a+b+2c,c-b,a+b-2c)=(0,0,0)$. Par identification

$$\begin{cases} a+b+2c &= 0\\ c-b &= 0\\ a+b-2c &= 0\end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1-L_3}{\iff} \begin{cases} 4c &= 0\\ b &= c\\ a &= c\end{cases} \iff a=b=c=0$$

Ainsi $\mathscr{C}'$ est libre, de plus $|\mathscr{C}'|=3=\dim(\mathbb{R}^3)$. D'où $\mathscr{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, de plus $Q=P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

4. On note $A'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$. D'après la formule de changement de base $A=QA'P^{-1}$, en multipliant par P à gauche et Q^{-1} à droite (Q^{-1} se calcule par la méthode de Gauss-Jordan), il vient

$$A'=Q^{-1}AP=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)=\begin{pmatrix}\frac{19}{4}&9\\-\frac{13}{4}&-8\\-\frac{5}{4}&-3\end{pmatrix}$$

5. On calcule $f(1,1)=(-1,2,4)$, on cherche à décomposer ce vecteur dans $\mathscr{C}'$, c'est-à-dire que l'on cherche $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(-1,2,4)=\alpha(1,0,1)+\beta(1,-1,1)+\gamma(2,1,-2)=(\alpha+\beta+2\gamma,\gamma-\beta,\alpha+\beta-2\gamma)$. Par identification, on a

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma &= -1\\ \gamma-\beta &= 2\\ \alpha+\beta-2\gamma &= 4\end{cases} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3\\ L_3\leftarrow L_3+L_2}}{\iff} \begin{cases} 4\gamma &= -5\\ \beta &= \gamma-2\\ \alpha &= 6+\gamma\end{cases} \iff \begin{cases} \gamma &= -\frac{5}{4}\\ \beta &= -\frac{13}{4}\\ \alpha &= \frac{19}{4}\end{cases}$$

Dès lors $f((1,1))=\frac{19}{4}(1,0,1)-\frac{13}{4}(1,-1,1)-\frac{5}{4}(2,1,-2)$. On calcule $f((2,3))=(-5,5,7)$ et on le décompose dans la base $\mathscr{C}'$: $f(2,3)=(-5,5,7)=\alpha(1,0,1)+\beta(1,-1,1)+\gamma(2,1,-2)$ après résolution du système, on trouve $f(2,3)=9(1,0,1)-8(1,-1,1)-3(2,1,-2)$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)=\begin{pmatrix}\frac{19}{4}&9\\-\frac{13}{4}&-8\\-\frac{5}{4}&-3\end{pmatrix}$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

6.

Correction de l'exercice 9. 1. On sait que $\phi\colon f\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, donc il existe un unique $f\in\mathscr{L}(E,F)$ tel que $A=\phi(f)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

2. Remarquons que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = r$. Notons S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E (qui existe car E est de dimension finie : c'est un résultat du chapitre EV de dim finie). Alors d'après la preuve du théorème du rang, $\tilde{f} : \begin{cases} S \longrightarrow \mathrm{Im}(u) \\ x \longmapsto u(x) \end{cases}$ est un isomorphisme et $\dim(S) = r$. Notons alors, $\mathscr{B}_S = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$ une base de S, $\mathscr{B}_K = (e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$. Ainsi, $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_S \cup \mathscr{B}_K = (s_1, s_2, \ldots, s_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base (adaptée) de E. Comme $\mathscr{B}_S$ est libre, et $\tilde{f}$ injective, on en déduit que $\tilde{f}(\mathscr{B}_S) = f(\mathscr{B}_S)$ est libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut alors compléter $f(\mathscr{B}_S) = (f(s_1), \ldots, f(s_r))$ en une base de F notée $\mathscr{C}' = (f(s_1) \ldots, f(s_r), f_{r+1}, \ldots, f_p)$. Cherchons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$, pour cela, on sait qu'il suffit de décomposer les images par f des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{C}'$:
   - Fixons $j \leqslant r$, décomposons $f(s_j)$ dans la base $\mathscr{C}'$, comme $f(s_j) \in \mathscr{C}'$, on peut donc le décomposer facilement dans $\mathscr{C}'$:
   $$f(s_j) = 0\times f(s_1)+0\times f(s_2)+\ldots+0\times f(s_{j-1})+1\times f(s_j)+0\times f(s_{j+1})+\ldots 0\times f(s_r)+0\times f_{r+1}+\ldots+0\times f_p$$
   - Fixons $j \geqslant r+1$, $e_j \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(e_j) = 0_F$, ainsi les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{C}'$ sont toutes nulles. Dès lors, la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ est nulle.
   Ainsi, la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ n'a que des 0 sauf un 1 à la j-ième ligne si $j \leqslant r$.

   Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = J_r$.
3. D'après la formule de changement de base, $A = QJ_rP^{-1}$, avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$.
4. En utilisant la transposée, $A^\top = (P^{-1})^\top (J_r)^\top Q^\top$, comme $(P^{-1})^\top$ et $Q^\top$ sont inversibles, $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}((J_r)^\top)$. Or, la matrice $(J_r)^\top$ possède $p-r$ colonnes nulles et r colonnes non nulles, on remarque que ces r colonnes non nulles sont linéairement indépendantes, ainsi $\mathrm{rg}((J_r)^\top) = r = \mathrm{rg}(A)$

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/50e41m4bxO0

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15. 1. On a

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(C) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Comme $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, pour trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$, il suffit de trouver 2 vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ qui forment une famille libre. Or $f(e_1) = (-1,1,1)$ et $f(e_2) = (0,1,0)$. Ces deux vecteurs forment bien une famille libre de f, ainsi $((-1,1,1),(0,1,0))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Déterminons le noyau de f. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$X \in \mathrm{Ker}(C) \iff CX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x-2z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ x+2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -2z \\ y &= z \end{cases}$$
$$\iff X = z\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Et donc $\ker(f) = \mathrm{vect}((-2,1,1))$. Soit $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe λ tel que $u = \lambda(-2,1,1) = (-2\lambda, \lambda, \lambda)$. De même, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = a(-1,1,1) +$

$b(0,1,0) = (-a, a+b, a)$. Par identification, on obtient $\begin{cases} -a &= -2\lambda \\ a+b &= \lambda \\ a &= \lambda \end{cases}$. Après résolution, on obtient $a = b = \lambda = 0$. Ainsi, $u = (0,0,0)$. On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{(0,0,0)\}$. Comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on obtient l'égalité, ainsi $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, on a bien $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18. Supposons qu'il existe $X \in \mathrm{Ker}(A)$ et X non nul. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Définissions un ensemble $E = \{|x_i| \mid i \in [\![1\,; n]\!]\}$, E est un ensemble fini donc admet un maximum. Soit $i_0 \in [\![1\,; n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max(E)$. Comme $AX = 0$, on a, en particulier,

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i_0,k} x_k = 0$$

Ainsi, en isolant le terme pour $k = i_0$, on a

$$A_{i_0,i_0} \times x_{i_0} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} A_{i_0,k} x_k$$

Passons au module, par inégalité triangulaire, on a

$$|A_{i_0,i_0}| \times |x_{i_0}| = |A_{i_0,i_0} x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |A_{i_0,k}| \times |x_k| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |A_{i_0,k}| \times |x_{i_0}|$$

En simplifiant par $|x_{i_0}|$ qui est non nul (car on a supposé $X \neq 0$), on obtient une contradiction avec le fait que $|a_{i_0,i_0}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |A_{i,k}|$. Ainsi $X = 0_{n,1}$ et $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$. Dès lors, la matrice A est inversible.

Correction de l'exercice 19. Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$.

Alors

- $f(1) = (1,1,1) = 1f_1 + 1f_2 + 1f_3$
- $f(X) = (1,2,3) = 1f_1 + 2f_2 + 3f_3$
- $f(X^2) = (1,4,9) = 1f_1 + 4f_2 + 9f_3$
- $f(X^3) = (1,8,27) = 1f_1 + 8f_2 + 27f_3$

On obtient donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

Pour calculer le rang, échelonnons la matrice :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L2}{=} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Remarque : comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que f est surjective. Par le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$. Soit $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

1. La fonction f est bien à valeur dans E, de plus, la linéarité se montre sans problème.
2. On rappelle que la base canonique de E est $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ [1]. De plus, $f(E_{1,1}) = E_{1,1} + E_{2,1}$, $f(E_{1,2}) = E_{1,2} + E_{2,2}$, $f(E_{2,1}) = E_{1,1} + E_{2,1}$ et $f(E_{1,2}) = E_{1,2} + E_{2,2}$. Ainsi
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, en effectuant le produit AM, que $M \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $a + c = b + d = 0$ si et seulement si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$, si et seulement si $M \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$. Donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ (ces deux matrices sont indépendantes).

   On a donc un noyau de dimension 2, par le théorème du rang ($f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$), l'image de f est de dimension 2, il suffit donc de trouver deux matrices dans l'image qui soient indépendantes. Considérons
$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Correction de l'exercice 22.

1. Comme $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $\dim(\mathrm{vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n)) = 1$, où on a noté C_j la j-ième colonne de M. Considérons $\mathscr{B} = (C)$ une base de $\mathrm{Im}(C)$, $C \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$.

   Ainsi, pour tout $j \in [\![1\,; n]\!]$, il existe $\ell_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \ell_j C$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, $m_{i,j} = \ell_j c_i$. Notons alors $L = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Remarquons que le produit $C \times L$ est possible et que $CL \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et effectuons ce produit : à la i-ième ligne, j-ième colonne, par la formule du produit matriciel, $c_i \ell_j = m_{i,j}$. On a donc montré que $M = CL$.
2. Si $q \geqslant 2$, alors en prenant $A = E_{1,1} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B = E_{2,1} \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{R})$, alors $AB = \delta_{1,2} E_{1,1} = 0_{p,n}$ tandis que A et B sont non nuls. Si jamais $q = 1$, la question 3 va prouver que AB est nécessairement non nul.
3. Si $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ldots & \ell_n \end{pmatrix}$. Comme L est non nul, il existe $j \in [\![1\,; n]\!]$, tel que $\ell_j \neq 0$. De même, il existe $i \in [\![1\,; n]\!]$, tel que $c_i \neq 0$. Alors $\ell_j c_i \neq 0$ et c'est le coefficient de CL à la i-ième ligne, j-ième colonne. Ainsi, CL est non nul. De plus, $\mathrm{rg}(CL) \leqslant \mathrm{rg}(C) \leqslant 1$ [2]. Comme CL est non nul, on a $\mathrm{rg}(CL) > 0$. Dès lors, $\mathrm{rg}(CL) = 1$.

Correction de l'exercice 23.

1. On pourrait écrire les éléments de la base de $\mathscr{B}$ dans un autre ordre.
2. En effet, le rang d'un produit de deux matrices est inférieur ou égal au rang de chacune des deux matrices, et le rang d'une matrice est inférieure ou égale à son nombre de lignes et à son nombre de colonne.

Correction de l'exercice 24. Comme $AB - A - B = 0_n$, on a $AB - A - B + I_n = I_n$ ce qui se factorise en $(A-I_n)(B-I_n) = I_n$. Ceci suffit à garantie que $A-I_n$ est inversible d'inverse, $B-I_n$, ainsi $(B-I_n)(A-I_n) = I_n$, en développant, on a $BA - A - B + I_n = I_n$, ainsi, $BA = A + B = AB$.

Correction de l'exercice 25. 1. $\mathrm{tr}(I_n) = n$

2. Tout d'abord, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{tr}\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $C = \lambda A + B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$. Ainsi, $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j}$, ainsi
$$\mathrm{tr}(\lambda A + B) = \mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} + b_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$
Ainsi, $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrons que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$, déjà $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = \mathrm{tr}(\lambda E_{1,1})$ avec ($E_{i,j}$ matrice élémentaire). Donc $\lambda \in \mathrm{Im}(\mathrm{tr})$, ainsi $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{tr})$, $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est (1), $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(f)) = 1$. En appliquant le théorème du rang à tr, on a $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) + \mathrm{rg}(f)$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = n^2 - 1$. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,i} = 0$. Donc $m_{n,n} = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} m_{i,i}$. Or,
$$\begin{aligned}
M &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j}\\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j}\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}E_{i,i} + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}\right)E_{n,n} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j}\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}(E_{i,i} - E_{n,n}) + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j}
\end{aligned}$$
Ainsi, si on note $\mathscr{G} = (E_{i,i} - E_{n,n})_{1\leqslant i\leqslant n-1} \cup (E_{i,j})_{i\neq j}$. On obtient une famille de $n^2 - 1$ matrices, et $M \in \mathrm{vect}(\mathscr{G})$, on a donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \subset \mathrm{vect}(\mathscr{G})$. En remarquant que toutes les matrices de $\mathscr{G}$ sont de trace nulle, ainsi $\mathscr{G} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Comme, $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est un espace vectoriel, on obtient $\mathrm{vect}(\mathscr{G}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{vect}(\mathscr{G})$. Dès lors, $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et possède $(n-1) + (n^2 - n) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}))$ éléments donc, $\mathscr{G}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

4. On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $C = AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $D = BA = (d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![\, 1\,;n \,]\!]^2$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ et $d_{i,j} = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{i,p}a_{p,j}$. Ainsi,
$$\mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}(D) = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}$$
En échangeant les deux sommes, on constate que $\mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(C)$. Dès lors, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

5. Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$. Alors d'après la formule de changement de base pour un endomorphisme : $A = PA'P^{-1}$ et
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PA'P^{-1}) = \mathrm{tr}((PA')(P^{-1})) \underset{3}{=} \mathrm{tr}((P^{-1})(PA')) = \mathrm{tr}((P^{-1}P)A') = \mathrm{tr}(A')$$
Ainsi, quelque soit la base choisie, la trace de la matrice de u est toujours la même. On pose $\mathrm{tr}(u)$ cette valeur.

6. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d)-(-b)(-c) = (x-a)(x-d)-bc = x^2-(a+d)x+ad-bc = x^2-\mathrm{tr}(A)x+\det(A)$$

Ainsi, $P = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$

7. Comme p est une projection, on sait que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Soit $\mathscr{B}_1$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathscr{B}_2$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$. Alors $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de E. Notons $r = \mathrm{rg}(p) = \dim(\mathrm{Im}(p))$. Alors

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{n-r,r} \\ \hline 0_{r,n-r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right)$$

Alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(A)) = r = \mathrm{rg}(p)$.

8. Posons $A = B = I_n$, alors $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(I_n) = n$. Tandis que $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(I_n)^2 = n^2$. Or si $n \neq 1$, $n^2 \neq n$. Donc la propriété est fausse pour $A = B = I_n$, si $n \geqslant 2$. Si $n = 1$ (autrement dit, on a des matrices de taille $(1,1)$, ce qui n'est pas très intéressant), alors $A = (a)$, $B = (b)$, et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(ab) = ab = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

Correction de l'exercice 26.

1. Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P+Q)'' + (1-X)(\lambda P+Q)' = X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(XP'' + (1-X)P') + (XQ'' + (1-X)Q') = \lambda\phi(P) + \phi(Q) \end{aligned}$$

De plus,

$$d^\circ(1-X)P' = d^\circ(1-X) + d^\circ P' \leqslant 1 + d^\circ P - 1 \leqslant n \quad \text{et} \quad d^\circ XP'' = d^\circ X + d^\circ P'' \leqslant 1 + d^\circ P - 2 \leqslant n-1$$

Ceci prouve que $XP'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(1-X)P' \in \mathbb{R}_n[X]$, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Notons $\mathscr{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$. Alors, on sait que la j-ième colonne de A contient les coordonnées de l'image de φ du j-ième vecteur de $\mathscr{B}$. C'est-à-dire $\varphi(X^{j-1})$. Remarquons que $\varphi(1) = 0$, ainsi la première colonne de A contient que des 0. Fixons $j \in [\![2 ; n+1]\!]$:

$$\begin{aligned} \varphi(X^{j-1}) &= X(X^{j-1})'' + (1-X)(X^{j-1})' = X \times ((j-1)(j-2)X^{j-3}) + (1-X)(j-1)X^{j-2} \\ &= -(j-1)X^{j-1} + (j-1)X^{j-2}(j-2+1) = -(j-1)X^{j-1} + (j-1)^2X^{j-2} \end{aligned}$$

Ainsi, $a_{j,j} = -(j-1)$ et $a_{j-1,j} = (j-1)^2$ et si $i \in [\![0 ; n]\!] \backslash \{j, j-1\}$, $a_{i,j} = 0$. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

3. D'après le cours, on sait que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{vect}(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2), \ldots, \phi(X^n))$. De plus, $\phi(1) = 0$, donc

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{vect}(\phi(X), \phi(X^2), \ldots, \phi(X^n))$$

Or d'après la question précédente, $d^\circ\phi(X^i) = i$ pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, ainsi, $(\phi(X), \phi(X^2), \ldots, \phi(X^n))$ est une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, donc c'est une famille libre, comme c'est aussi une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\phi)$ on en conclut que c'est une base de $\mathrm{Im}(\phi)$. Dès lors $\mathrm{rg}(\phi) = \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = n$.

4. Soit $j \in [\![0\,;n]\!]$, posons

$$Q_j = (\phi + k\mathrm{Id}_E)(X^j) = \phi(X^j) + kX^j = -jX^j + (j-1)^2 X^{j-1} + kX^j = (k-j)X^j + (j-1)^2 X^{j-1}$$

Si $j \neq k$, alors $d^\circ Q_j = j$, par contre, si $j = k$, alors $d^\circ Q_k = k-1$. Ainsi, alors $(Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1})$ est une famille libre de polynôme de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ (car constituée de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts), comme cette famille a k éléments et que $\dim(\mathbb{R}_{k-1}[X]) = k$, $(Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}$, donc $Q_k \in \mathrm{vect}\,(Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1})$. Dès lors,

$$\mathrm{Im}(\phi + k\mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}\,(Q_0, Q_1, \dots, Q_n) = \mathrm{vect}(Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1}, Q_{k+1}, \dots, Q_n)$$

À nouveau, la famille de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts $(Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1}, Q_{k+1}, \dots, Q_n)$ est libre, donc c'est une base de l'image, ainsi $\dim(\mathrm{Im}(\phi + k\mathrm{Id}_E)) = n$. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)) = 1$ prouvant que $\phi + k\mathrm{Id}_E$ n'est pas injective (son noyau n'est pas réduit au vecteur nul).

5. Comme $\dim(\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)) = 1$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que (P) soit une base de $\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)$. P n'est pas le polynôme nul, car il est dans une famille libre, ainsi, en notant c son coefficient dominant, et en notant que $\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)$ est un espace vectoriel, $P_k = \dfrac{1}{c}P \in \ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)$. ainsi $\phi(P_k) + kP_k = 0$, dès lors $\phi(P_k) = -kP_k$.

   Soit Q un polynôme unitaire tel que $\phi(Q) = -kQ$, alors $(\phi + k\mathrm{Id}_E)(Q) = 0$, donc $Q \in \ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)$. Par conséquent, P_k et Q sont deux polynômes appartenant au même espace vectoriel de dimension 1, dès lors, P_k et Q sont colinéaires, comme ils sont non nuls, on peut en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda P_k$ comme P_k est unitaire, le coefficient dominant de Q est λ, mais Q est unitaire, donc $\lambda = 1$. Ceci provue que $Q = P_k$ d'où l'unicité.

6. Notons $d = d^\circ P_k$, comme P_k est unitaire de degré d, ${P_k}'$ est de degré $d-1$ et de coefficient dominant d, ainsi $(1-X)P'$ est de degré d de coefficient dominant $-d$, quand on rajoute XP'' de degré $d-1$, on obtient que $\phi(P_k)$ est un polynôme de degré d et de coefficient dominant $-d$. Or $\phi(P_k) = -kP_k$ a pour coefficient dominant $-k$, dès lors $-d = -k$ et $d^\circ P_k = d = k$.

7.
   - On sait que P_0 est un polynôme unitaire de degré 0, donc $P_0 = 1$.
   - On sait que P_1 est un polynôme unitaire de degré 1, donc $P_1 = X + a$. De plus,

     $$\phi(P_1) = \phi(X) + a\phi(1) = 1 - X + 0 = -P_1 = -X - a$$

     . Par identification $-a = 1$ et $P_1 = X - 1$.
   - En utilisant la linéaire de ϕ :

     $$\phi(X^2 - 4X + 2) = \phi(X^2) - 4\phi(X) + \phi(2) = (-2X^2 + 4X) - 4(1 - X) + 0 = -2(X^2 - 4X + 2)$$

     Ainsi, $Q = X^2 - 4X + 2$ est un polynôme unitaire tel que $\phi(Q) = -2Q$, par unicité de P_2, $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

8. Comme, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $d^\circ P_k = k$, $\mathscr{B}'$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les degrés sont deux à deux distincts, ainsi $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = |\mathscr{B}'|$. Ainsi, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

9. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\phi(P_k) = -kP_k$, ainsi $\phi(P_k)$ se décompose dans la base $\mathscr{B}'$ avec toutes les coordonnées qui sont nulles sauf celle devant P_k qui vaut $-k$. Ainsi,

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

10. En notant $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on sait que $A = PDP^{-1}$.

Correction de l'exercice 27. 1. soit $M \in H$, alors il existe $(A, B) \in H^2$ tel que $M = AB - BA$, alors $\text{tr}(M) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0$ (en effet, la trace est linéaire et $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$) donc $M \in \text{Ker}(\text{tr})$. Ainsi, $H \subset \text{Ker}(\text{tr})$.

2. Notons $\mathscr{P}(n)$: «Si $M \in \text{Ker}(\text{tr})$, alors M est semblable à une matrice de N».
   - Pour $n = 1$, si $M \in \text{Ker}(\text{tr})$, alors $M = (0) \in \mathbb{N}$ ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $M \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que $\text{tr}(M) = 0$ si $M = \lambda I_{n+1}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\text{tr}(M) = \lambda \text{tr}(I_{n+1}) = (n+1)\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$, ainsi $M = 0_n \in N$. Si $M \notin \text{vect}(I_{n+1})$ alors M est la matrice d'un endomorphisme noté f dans une base $\mathscr{B}$ d'un espace vectoriel E. Comme $M \notin \text{vect}(I_{n+1})$, f n'est pas une homothétie, ainsi, il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ soit libre. On complète alors en une base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de E, avec $e_n = f(x)$ et[3] $e_{n+1} = x$ Ainsi,

$$M' = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ & & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, si on calcule l'image du dernier vecteur de $\mathscr{B}$ par f cela donne :

$$f(e_n + 1) = f(x) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_{n-1} + 1e_n + 0e_{n+1}$$

Notons $\tilde{M} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice formée de M' auquel on retire la dernière ligne et la dernière colonne. Ainsi, on peut écrire $M' = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{M} & C \\ \hline L & 0 \end{array}\right)$ où L est la dernière ligne de M' sans le 0 en bas à droite et C la dernière colonne de M' sans le 0 en bas à droite. Par la formule de changement de base, $M = PM'P^{-1}$ où $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, ainsi,

$$0 = \text{tr}(M) = \text{tr}(PM'P^{-1}) = \text{tr}(M'P^{-1}P) = \text{tr}(M') = \sum_{k=1}^{n+1} M'_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{M}_{k,k} + M'_{n+1,n+1} = \text{tr}(\tilde{M}) + 0$$

Ainsi, $\text{tr}(\tilde{M}) = 0$. Remarquons que $\tilde{M}$ contient les coordonnées des vecteurs de $f(e_1)$, $f(e_3)$, $\ldots$, $f(e_n)$ à l'exception de celle en e_{n+1}. Notons $F = \text{vect}(f(x), e_3, \ldots, e_{n+1})$, alors $E \oplus F$. Notons π la projection sur F parallèlement à $\text{vect}(x)$. Ainsi, pour $e_j \in [\![1\,; n]\!]$

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^{n+1} M'_{k,j} e_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M'_{k,j} e_k}_{\in F} + \underbrace{M'_{n+1,j} e_{n+1}}_{\in \text{vect}(x)}$$

alors

$$\pi(f(e_j)) = \sum_{k=1}^{n} M'_{k,j} e_k$$

Ainsi, $\tilde{M} = \text{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(\pi \circ f)$. En appliquant $\mathscr{P}(n)$ à $\tilde{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\tilde{M}$ est semblable à une matrice, notée A, ayant des zéros sur la diagonale. Ainsi, A est la matrice de $\pi \circ f$ dans une autre base de F, il existe $\mathscr{B}''$ base de F tel que $\text{Mat}_{\mathscr{B}''}(\pi \circ f) = A$. Notons $\mathscr{B}''' = \mathscr{B}'' \cup (x)$ Montrons que $\mathscr{B}'''$ est une base de E. En effet, $\mathscr{B}''$ est libre et $x \notin F = \text{vect}(\mathscr{B}'')$, dès lors $\mathscr{B}'''$ est libre et $|\mathscr{B}'''| = |\mathscr{B}''| + 1 = \dim(F) + 1 = n + 1 = \dim(E)$. Comme $f(e_{n+1}) \in F$, la coordonnée devant e_{n+1} de $f(e_{n+1})$ dans $\mathscr{B}'''$ est nulle.

Dès lors, $B = \text{Mat}_{\mathscr{B}'''}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & C' \\ \hline L' & 0 \end{array}\right)$ n'a que des zéros sur la diagonale. Par changement de base, M est semblable à B une matrice ayant des zéros sur la diagonale.

3. On met ces vecteurs à la fin pour plus de commodité

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

3. Soit $M \in N$. Vérifions que $MD - DM \in N$. Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$, alors

$$(MD-DM)_{i,i} = (MD)_{i,i} - (DM)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k}D_{k,i} - \sum_{k=1}^{n} D_{i,k}M_{k,i} = M_{i,i}D_{i,i} - D_{i,i}M_{i,i} = 0$$

Ainsi $\phi\colon N \to N$. Soit $(A,B) \in N^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\phi(\lambda A + B) = (\lambda A + B)D - D(\lambda A + B) = \lambda(AD - DA) + BD - DB = \lambda\phi(A) + \phi(B)$$

Ainsi, $\phi \in \mathscr{L}(N)$. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Alors $MD = DM$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]$, alors $(MD)_{i,j} = (DM)_{i,j}$ Donc

$$\sum_{k=1}^{n} M_{i,k}D_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{i,k}M_{k,j}$$

donc $M_{i,j}D_{j,j} = D_{i,i}M_{i,j}$ Soit $(j-i)M_{i,j} = 0$, si $i = j$, alors comme $M \in N$, $M_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ alors, par ce qui précède, $M_{i,j} = 0$. Ainsi, $M = 0_n$. Donc $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0_n\}$. L'endomorphisme ϕ est donc injectif de plus, N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc de dimension finie. Dès lors, ϕ est un automorphisme de N.

4. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$, alors d'après la question 2, il existe $M' \in N$ et P une matrice inversible telle que $M = PM'P^{-1}$, comme $M' \in N$, d'après la question 3, il existe $A \in N$ tel que $A = \phi(M') = M'D - DM'$ Dès lors,

$$M = P(M'D - DM')P^{-1} = PM'DP^{-1} - PDM'P^{-1} = \left(PM'P^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) - \left(PDP^{-1}\right)\left(PM'P^{-1}\right)$$

Ceci montre que $M \in H$ donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \subset H$, finalement [4] $H = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

Correction de l'exercice 28. 1. Soit $\mathscr{B}_F = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base de E, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

$$\forall x \in E \quad \exists!\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note $\varphi_i\colon x \mapsto \lambda_i$. De sorte que pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i$. On remarque que $\varphi_i \in E^\star$ et que φ_i est non nulle ($\varphi_i(e_i) = 1$). Montrons que $F = \bigcap_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$:

- Soit $x \in F$, alors $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n} 0x_i$. Par unicité de la décomposition dans la base $\mathscr{B}$, on en déduit que $\varphi_i(x) = 0$ si $i \geqslant p+1$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ pour tout $i \geqslant p+1$. Ainsi $x \in \bigcap_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.
- Soit $x \in \bigcap_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$. Alors pour tout $i \geqslant p+1$, $\varphi_i(x) = 0$. Donc $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)e_i + 0_E \in F$

En notant $H_i = \mathrm{Ker}(\varphi_i)$, H_i est un hyperplan de E (car φ_i est une forme linéaire non nulle) et $F = \bigcap_{i=p+1}^{n} H_i$ est l'intersection de $n-p$ hyperplans.

2. Soit $\varphi_i \in E^\star$ telle que $\mathrm{Ker}(\varphi_i) = H_i$ pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, on note $L_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_i) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. On note :

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

4. Au passage, cela montre que H est un sous-espace vectoriel ce qui n'était pas évident au départ, c'est un des seuls exemples, si ce n'est le seul que je connaisse où il n'est pas évident de montrer que quelque chose est un sous-espace vectoriel.

De plus, soit $x \in E$, on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, alors $x \in \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ si et seulement si $\varphi_i(x)$ pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$ si et seulement si $L_i X = 0$ pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$ si et seulement si $MX = 0$. Ainsi la dimension de $\bigcap_{i=1}^{p} H_i$ est égale à la dimension de $\mathrm{Ker}(M)$. D'après le théorème du rang [5] :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) = \dim(\mathrm{Ker}(M)) = n - \mathrm{Im}(M) \geqslant n - p$$

5. On remarque que par cette méthode, on peut même calculer la dimension de l'intersection, en calculant précisément le rang et non en le majorant.