Chapitre 18

Dénombrement

Prerequis de ce chapitre : ensembles et applications.
Dans ce chapitre, on indique quelques résultats de dénombrement pour préparer le cours de probabilité.

Table des matières

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition et opérations

Définition du cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini, on appelle cardinal le nombre de ses éléments, et on le note $|E|$ ou $\mathrm{Card}(E)$.

Remarque 1. Cette définition n'est pas très précise, elle ne définit pas ce qu'est un ensemble fini ni ce qu'est le nombre d'éléments. Précisons cette définition : un ensemble E est dit **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi\colon [\![1 ; n]\!] \to E$. On montre alors que le n en question est alors unique, et on note $\mathrm{Card}(E) = n$.

Démonstration de l'unicité du cardinal d'un ensemble fini : Soit E un ensemble fini, il existe alors $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi\colon [\![1 ; n]\!] \to E$. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et une bijection $\psi\colon [\![1 ; m]\!] \to E$, alors $\psi^{-1} \circ \phi\colon [\![1 ; n]\!] \to [\![1 ; m]\!]$ est une bijection. Soit $\mathscr{P}(n)$: «Si $m \in \mathbb{N}$ tel que $[\![1 ; n]\!]$ est en bijection avec $[\![1 ; m]\!]$ alors $m = n$». Si $n = 0$, comme l'ensemble vide n'est pas en bijection avec un ensemble non vide, $m = n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons, $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $f\colon [\![1 ; n+1]\!] \to [\![1 ; m]\!]$ une bijection, et τ la bijection de $[\![1 ; m]\!]$ dans lui-même échangeant $f(n+1)$ et m. Alors la restriction de $\tau \circ f$ à $[\![1 ; n]\!]$ est une bijection entre $[\![1 ; n]\!]$ et $[\![1 ; m-1]\!]$ donc $n = m-1$ donc $n+1 = m$. Ceci prouve que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi $n = m$.

Exemple 1.
- $|\{1,1,3,1,-8\}| =$.
- Soit deux entiers $a \leqslant b$, alors $\mathrm{Card}([\![a ; b]\!]) = b - a + 1$, en particulier, $\mathrm{Card}([\![1 ; n]\!]) = n$, $\mathrm{Card}([\![0 ; n]\!]) = n+1$ si $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.
- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$ etc. ne sont pas finis.

Solution des exemples 1 : Notons $E = \{1,1,3,1,-8\}$, alors $|E| = 3$, en effet, posons $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ et $f(3) = -8$. Alors, $f\colon [\![1 ; 3]\!] \to E$ est bijective.

On vérifie que $p\colon \begin{cases} [\![1 ; b-a+1]\!] \longrightarrow [\![a ; b]\!] \\ \qquad p \qquad \longmapsto p + a - 1 \end{cases}$ est une bijection. Ainsi, $[\![a ; b]\!]$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}([\![a ; b]\!]) = b-a+1$.
Il suffit alors de prendre $(a,b) = (0,n)$ puis $(a,b) = (1,n)$.

Proposition n° 1 : partie d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et $A \subset E$, alors : A est fini et $|A| \leqslant |E|$ et $A = E$ ssi $|A| = |E|$

Lemme 1. Si E est un ensemble fini non vide et $e \in E$, alors $|E \backslash \{e\}| = |E| - 1$.

Démonstration du lemme 1 : Notons $n = |E|$ et $\varphi\colon [\![1 ; n]\!] \to E$ une bijection. Considérons τ la bijection de $[\![1 ; n]\!]$ dans $[\![1 ; n]\!]$ qui échange n et $\varphi^{-1}(e)$. Alors $\psi = \varphi \circ \tau$ est une bijection de $[\![1 ; n]\!]$ vers E, tel que $\psi(n) = e$. Ainsi, $\psi_{|[\![1 ; n-1]\!]|}\colon [\![1 ; n-1]\!] \to E \backslash \{a\}$ est une bijection. Ainsi, $|E \backslash \{e\}| = n - 1 = |E| - 1$.
Démonstration de la proposition n° 1 : On note $\mathscr{P}(n)$: «Si E est un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$, alors A est fini et $|A| \leqslant |E|$». Si $n = 0$, et $|E| = n$, et si $A \subset E = \varnothing$, alors $E = \varnothing$. Ceci prouve que A est fini et que $|A| \leqslant |E|$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Considérons E un ensemble fini de cardinal $n+1$ et $A \subset E$. Distinguons les cas :
- Si $A = E$, alors A est fini et $|A| = |E|$.
- Si $A \neq E$, comme $A \subset E$, on peut en déduire que $E \not\subset A$, ainsi il existe $e \in E$ tel que $e \notin A$. Ainsi, $A \subset E \backslash \{e\}$, or, d'après le lemme, $E \backslash \{e\}$ est un ensemble fini de cardinal n. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à l'ensemble $E \backslash \{e\}$, A est alors un ensemble fini et $|A| \leqslant |E \backslash \{e\}| = n < n+1 = |E|$.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence le résultat est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on a démontré que si $A \subset E$ avec $|E| = n+1 \geqslant 1$ et $A \neq E$, alors $|A| < |E|$. Par contraposée, dans le cas où $|E| = n+1$, si $|A| = |E|$, alors $A = E$. Il reste à traiter le cas où $|E| = 0$, mais si $A \subset E = \varnothing$, alors $A = \varnothing = E$. ■

Proposition n° 2 : cardinal de l'union

Soient E un ensemble fini et A et B deux parties de E.

1. Si A et B sont disjointes, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$
2. $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$ $\qquad |\overline{A}| = |E| - |A|$ $\qquad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
3. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des parties de E deux à deux disjointes, alors, $\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Démonstration de la proposition n° 2 :

1. Notons $n = |A|$ et $m = |B|$, alors il existe $\varphi\colon [\![1\,; n]\!] \to A$ et $\psi\colon [\![1\,; m]\!] \to B$ deux bijections. On pose alors

$$\Phi\colon \begin{cases} [\![1\,; n+m]\!] \longrightarrow A \cup B \\ \quad p \quad \longmapsto \begin{cases} \varphi(p) & \text{si} \quad p \leqslant n \\ \psi(p-n) & \text{si} \quad p > n \end{cases} \end{cases}$$

Montrons que Φ est injective : soit $(k, k') \in [\![1\,; n+m]\!]$. Supposons $\Phi(k) = \Phi(k')$, alors comme $\Phi(k) \in A \cap B$, il y a deux cas : soit $\Phi(k) = \Phi(k') \in A$ et comme $A \cap B = \varnothing$, on en déduit que $\Phi(k) = \Phi(k') \notin B$, ainsi nécessairement, $p \leqslant n$ et on a $\varphi(n) = \varphi(m)$ et comme φ est injective, $n = m$, si $\Phi(k) = \Phi(k') \in B$, alors de même $\psi(k-n) = \psi(k'-n)$ et par injective de ψ, $k - n = k' - n$ et donc $k = k'$. Ainsi, Φ est injective. Soit $x \in A \cup B$, alors si $x \in A$, il existe $k \in [\![1\,; n]\!]$ tel que $x = \varphi(k)$ et donc $x = \Phi(k)$, si $x \in B$, alors il existe $k \in [\![1\,; n]\!]$ tel que $x = \psi(k) = \Phi(k+n)$, ainsi Φ est surjective. Comme Φ est bijective, on en déduit que $A \cap B$ est fini et que $\mathrm{Card}(A \cap B) = n + m = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

2.
3. ■

Exemple 2.
- Dans $[\![0\,; 99]\!]$, combien y a-t-il de nombres entiers qui contiennent au moins un 1 ?
- Sur un jeu de 52 cartes, combien y a-t-il de cartes qui sont des trèfles ou des rois ?

Proposition n° 3 : cardinal du produit

1. Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est un ensemble fini et $|E \times F| = |E| \times |F|$
2. Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis, alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est fini et $\left| \prod_{i=1}^{n} E_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|$

Démonstration de la proposition n° 3 :

1. Posons l'hypothèse de récurrence : $\mathscr{P}(n)$: «Si E est un ensemble fini de cardinal n et F un ensemble fini, alors $E \times F$ est un ensemble fini, et $|E \times F| = |E| \times |F|$. Si $n = 0$, alors $E = \varnothing$, et $E \times F = \varnothing$, ainsi $|E \times F| = 0 = |E| \times |F|$. Si $n = 1$, alors $|E| = 1$, ainsi, $E = \{e\}$, alors, $\varphi\colon f \mapsto (e, f)$ est une bijection de F vers $E \times F$, ainsi comme F est fini, $E \times F$ est fini et $|E \times F| = |F| = |E| \times |F|$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit E un ensemble de cardinal $n+1$, en particulier E est non vide. Fixons $e \in E$. Et posons $E' = E \backslash \{e\}$. Alors $E \times F = (E' \times F) \bigcup (\{e\} \times F)$, et cette union est disjointe. Or, par récurrence $E' \times F$ est fini, et $\{e\} \times F$ est fini (voir $\mathscr{P}(1)$, ainsi $E \times F$ est fini, et

$$|E \times F| = |E' \times F| + |\{e\} \times F| = |E'| \times |F| + |F| = (|E| - 1) \times F + |F| = |E| \times |F|$$

2. Récurrence sur n. ■

Exemple 3.
- Si on lance un dé puis une pièce, combien y a-t-il de possibilités ?
- À la cantine, il y a 3 entrées, 2 plats et 4 desserts (on peut toujours rêver), combien cela fait de menus possibles ?

Proposition n° 4 : cardinal de l'ensemble des parties de *E*

Soit E un ensemble fini, alors $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble fini et $|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$

Démonstration de la proposition n° 4 : Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{Q}(n)$: «Si $|E| = n$, alors $\mathscr{P}(E) = 2^n$. Si $n = 0$, alors $E = \varnothing$, et $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing\}$, alors E est fini et $|\mathscr{P}(E)| = 1 = 2^0$, ainsi $\mathscr{Q}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie. Soit E un ensemble tel que $|E| = n + 1$. Fixons $e \in E$, alors si $F \in \mathscr{P}(E)$, il a deux possibilités : $e \in F$ ou $e \notin F$, ainsi, en notant $E' = E \backslash \{e\}$, on obtient que $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(E') \cup \{F \cup \{e\} \mid F \in \mathscr{P}(E')\}$. Notons $R = \{F \cup \{e\} \mid F \in \mathscr{P}(E')\}$. Or $|E'| = |E| - 1 = n$, ainsi on peut appliquer $\mathscr{Q}(n)$ à E'. Dès lors $\mathscr{P}(E')$ est fini et $|\mathscr{P}(E')| = 2^n$. Notons que $F \mapsto F \cup \{e\}$ est une bijection de $\mathscr{P}(E')$ vers R, ainsi R est aussi fini et $|R| = |\mathscr{P}(E')| = 2^n$. De plus, R et $\mathscr{P}(E')$ sont disjoints. Dès lors, $\mathscr{P}(E)$ est fini et $|\mathscr{P}(E)| = |\mathscr{P}(E')| + |R| = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Dès lors, $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie. ■

Exemple 4. Si $E = \{1, 2, 3\}$, $|\mathscr{P}(E)| =$

1.2 Applications entre ensembles finis

Proposition n° 5 : fonctions injectives, surjectives et bijectives et cardinaux

Soit E et F deux ensembles.

1. Si $f\colon E \to F$ est bijective, alors E est un ensemble fini ssi F est un ensemble fini et dans ce cas $|E| = |F|$.
2. Si $f\colon E \to F$ injective et que F est un ensemble fini, alors E est un ensemble fini et $|F| \geqslant |E|$.
3. Si $f\colon E \to F$ surjective et que E est un ensemble fini, alors F est un ensemble fini et $|F| \leqslant |E|$.
4. Si E et F sont deux ensembles finis et que $|E| = |F|$ et que $f\colon E \to F$, alors sont équivalents :

$$f \text{ surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ bijective}$$

Démonstration de la proposition n° 5 :

1. Prenons $f\colon E \to F$ bijective. Supposons E de cardinal fini n, alors il existe $\phi\colon [\![1\,; n]\!] \to E$ une bijection, par composée, $\phi \circ f\colon [\![1\,; n]\!] \to F$ est une bijection. Ceci prouve que F est un ensemble fini, $|F| = n = |E|$. De même, supposons F de cardinal fini n, alors il existe $\phi\colon [\![1\,; n]\!] \to F$ une bijection, par composée, $\phi \circ f^{-1}\colon [\![1\,; n]\!] \to E$ est une bijection. Ceci prouve que E est un ensemble fini, $|E| = n = |F|$.
2. Prenons $f\colon E \to F$ injective et F un ensemble fini. Alors $\tilde{f}\colon \begin{cases} E \longrightarrow f(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection. Or $f(E) \subset F$, ainsi $f(E)$ est un ensemble fini et $|f(E)| \leqslant |F|$, mais en appliquant le point 1 à $\tilde{f}$, E est un ensemble fini et $|E| = |f(E)| \leqslant |F|$.
3. Prenons $f\colon E \to F$ surjective avec E un ensemble fini. Pour tout $y \in F$, choisissons $x_f \in E$, un antécédent de y par f : $f(x_y) = y$. On a donc construit une fonction $i\colon \begin{cases} F \longrightarrow E \\ y \longmapsto x_f \end{cases}$, cette fonction est injective, par le point précédent appliqué à i, F est un ensemble fini et $|F| \leqslant |E|$.
4. Si f est bijective, alors f est surjective et f est injective.

   Supposons f injective, alors, comme on l'a déjà vu, $\begin{cases} E \longrightarrow f(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection, donc $|f(E)| = |E| = |F|$, ainsi comme $f(E) \subset F$, on en déduit $f(E) = F$ donc que f est surjective, puis injective.

   Supposons f surjective, alors $\tilde{i}\colon \begin{cases} F \longrightarrow i(F) \\ y \longmapsto x_f \end{cases}$ est une bijection, donc $|i(F)| = |F| = |E|$, comme $i(F) \subset E$, il s'ensuit que $i(F) = E$, donc i est une bijection de F vers E. or, $f \circ i = \mathrm{Id}_F$. En composant par $\tilde{i}^{-1}$, $f = \tilde{i}^{-1}$ est bijective. ■

Exemples 5.
- Dans la classe, il existe au moins deux personnes qui sont nés le même mois.
- Si on a $n + 1$ pantalons rangés dans n tiroirs, il existe au moins un tiroir avec plus d'un pantalon.

Proposition n° 6 : dénombrement de $\mathscr{F}(E, F) = F^E$

Si E et F deux ensembles finis, alors $\quad \mathscr{F}(E, F) = F^E$ est un ensemble fini $\quad$ et $|\mathscr{F}(E, F)| = |F^E| = |F|^{|E|}$

2 Listes et combinaisons

2.1 p-listes

Définition d'une p-liste (ou d'un p-uplet)

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle p-liste (ou p-uplet) d'éléments de E tout élément de E^p.

Proposition n° 7 : nombre de p-listes

Soit E un ensemble fini, alors le nombre de p-listes d'éléments de E est $\quad |E^p| = |E|^p$

Exemple 6. Un élève a 10 notes de colles (des entiers naturels) comprises entre 4 et 12, combien cela fait-il de possibilités ?

2.2 p-listes d'éléments distincts

Définition de p-listes d'éléments distincts

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle p-liste (ou p-uplet ou p-arrangement) d'éléments distincts de E tout élément $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que pour tout $(i, j) \in [\![1 ; p]\!]^2$, si $i \neq j$, alors $x_i \neq x_j$.

Proposition n° 8 : nombre de p-listes d'éléments distincts/arrangements

Si $|E| = n$ et $p \in [\![1 ; n]\!]$, alors le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$

Exemple 7. Sur une course de 100 cyclistes, combien y a-t-il de podium différents possibles ?

Proposition n° 9 : nombre d'applications injectives

Si $|E| = n$ et $|F| = p$ avec $p \leqslant n$, le nombre de fonctions injectives de F vers E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$

2.3 Permutations

Définition d'une permutation d'un ensemble

Soit E un ensemble fini de cardinal n, on appelle permutation de toute n-liste d'éléments distincts de E.

Proposition n° 10 : nombre de permutations

Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors le nombre de permutations de E est $n!$

Exemple 8. Si on mélange un jeu de 32 cartes combien cela fait-il de possibilités ?

Proposition n° 11 : nombre de bijections

Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|E| = |F| = n$, le nombre de bijections de E vers F est $n!$

2.4 Combinaisons/Parties à p-éléments

Définition d'une partie à p éléments

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$, on appelle partie à p éléments de E (ou p-combinaison de E) tout sous-ensemble de E à p éléments.

Proposition n° 12 : nombre de parties à p éléments

Si $|E| = n$ et $p \in [\![0 ; n]\!]$, le nombre de parties à p éléments de E est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple 9. Sur un jeu de 52 cartes, on tire 5 cartes. Combien cela fait-il de possibilités ?

Proposition n° 13 : propriétés des coefficients binomiaux

Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $p \in [\![0 ; n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ symétrie des coefficients binomiaux
2. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$
3. Pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$ formule du maire
4. Pour tout $k \in [\![2 ; n]\!]$, $k \times (k-1) \times \binom{n}{k} = n \times (n-1) \times \binom{n-2}{k-2}$ formule du maire et de l'adjoint
5. Pour tout $p \in [\![1 ; n-1]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ formule du triangle de Pascal
6. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ formule du binôme de Newton

Démonstration de la proposition n° 13 :

1.
2.
3. Une ville de n citoyens a un conseil municipal de k personnes dont un maire (avec $k \geqslant 1$ forcément). Combien y a-t-il de possibilités ? Pour choisir le conseil municipal de k personnes parmi les n citoyens, il y a $\dbinom{n}{k}$ possibilités. Une fois ce conseil municipal choisi, il y a k choix possibles pour le maire. Cela fait donc $k\dbinom{n}{k}$. Sinon, on choisit d'abord le maire parmi les n citoyens de la ville, il reste $k-1$ personnes à choisir pour le conseil municipal parmi les $n-1$ citoyens restantes. Cela fait $\dbinom{n-1}{k-1}$ possibilités. En multipliant par n, cela fait $n\dbinom{n-1}{k-1}$. Comme on a compté de deux façons différente la même chose, donc $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
4. Une ville de n citoyens a un conseil municipal de k personnes dont un maire et un adjoint (avec $k \geqslant 2$ donc). Soit on choisit d'abord le conseil de k personnes, cela fait $\dbinom{n}{k}$ possibilités, parmi ce groupe, on a k choix pour le maire, à ce maire fixé, il reste $k-1$ pour son adjoint, soit $k(k-1)\dbinom{n}{k}$ possibilités. Soit on choisit le maire parmi les n personnes, puis son adjoint parmi les $n-1$ personnes restantes, cela fait $n(n-1)$ possibilités, il reste à choisir les $k-2$ personnes pour former le conseil municipal parmi les $n-2$ citoyens restants, soit $n(n-1)\dbinom{n-2}{k-2}$ possibilités. Comme on a compté de deux façons différente la même chose, donc $k(k-1)\dbinom{n}{k} = n(n-1)\dbinom{n-2}{k-2}$.
5.
6. ■

devilliers.loic@gmail.com

3 Résumé sous forme de tableau

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, E un ensemble fini à n éléments et F un ensemble fini à p éléments.

Type d'objets	Partie de E (sous-ensemble de E)	Partie de E à p éléments	p-liste d'éléments de E (ou p-uplet)	p-liste d'éléments de E sans répétition (arrangement)
Définition	On dit que F est une partie (ou sous-ensemble) de E si $F \subset E$. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par conséquent, $F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subset E$	On dit que F est une partie de E à p-éléments, si $F \subset E$ et si $\lvert F\rvert = p$.	Une p-liste de E est de la forme $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ ou pour tout i, $a_i \in E$: $$E^p = \{(a_1, a_2, \dots, a_p) \quad \forall i \quad a_i \in E\}$$	Une p-liste de E, $(a_1, a_2, \dots, a_p)$, est sans répétition si pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$, si $i \neq j$ implique que $a_i \neq a_j$.
L'ordre compte	Non	Non	Oui	Oui
Répétition possible	Non	Non	Oui	Non
Exemple pour $E = \{1,2,3\}$ et $p = 2$	$\varnothing$ $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$ $\{1,2,3\}$	$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,1)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(3,1)$ $(3,2)$ $(3,3)$	$(1,2)$ $(1,3)$ $(2,3)$ $(2,1)$ $(3,1)$ $(3,2)$
Dénombrement	$\lvert\mathscr{P}(E)\rvert = 2^n$	$\binom{n}{p}$ si $p \leqslant n$, 0 sinon	n^p	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, 0 sinon
Interprétation mathématiques	Nombre d'applications de E vers $\{0,1\}$	Nombre de termes de la forme $a^p b^{n-p}$ si on développe $(a+b)^n$	Compte le nombre d'applications de F vers E.	Compte le nombre d'applications injectives de F vers E.
Interprétation : urne avec n boules	Nombre de tirages simultanés d'un nombre quelconque de boules	Nombre de tirages simultanée de p boules	Nombre de tirages successifs de p boules avec remise	Nombre de tirages successifs de p boules sans remise