DS7

27 Avril 2024

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Le développement ~~personnel~~ limité, c'est bon pour la santé !

1. Calculer le $DL_3(0)$ de $f\colon x \mapsto \sin(\ln(1+x))$.
2. Donner l'équation de la tangente de f en 0 ainsi que la position relative de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
3. Donner la valeur de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0\,;3]\!]$.

Diagonalisation : passage obligé par la base

Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, f_M l'application canoniquement associée à M et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3 = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le rang de $M - 2I_3$ et le rang de $M - 3I_3$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(M - 2I_3)$ et une base de $\mathrm{Ker}(M - 3I_3)$.
3. Démontrer que la concaténation des deux bases trouvées à la question précédente est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ notée $\mathscr{B}'$.
4. En déduire l'existence de $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que $M = PDP^{-1}$. Expliciter P et D mais pas P^{-1}.

Décathlon, à fond la forme linéaire !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0\,;2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_{2n})$. Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E \qquad L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E.
2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0\,;2n]\!]$.
3. Déterminer les dimensions de $\mathrm{Im}(L)$ et de $\mathrm{Ker}(L)$.
4. Prouver qu'il existe une base $\mathscr{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$ dont le premier vecteur est e_1.
5. Montrer que $E = \mathrm{vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E \qquad T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X$$

6. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.
7. Déterminer la matrice de T_λ dans une base adaptée à $E = \mathrm{vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.
8. Démontrer que T_λ est un automorphisme de E.
9. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, calculer $T_\alpha \circ T_\beta$.
10. Déterminer ${T_\lambda}^{-1}$.

Du disco pour aller dans $\mathbb{C}$!

Dans ce problème, on travaille dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. On pose $f\colon \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto a+d \end{cases}$.

Généralités

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}$.
4. On pose $G = \mathrm{vect}(I_2)$, montrer que G et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.
5. On note p la projection sur G parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donner l'expression de $p(M)$.
6. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})^2$, montrer que $f(AB) = f(BA)$.
8. Est-ce que pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$?

Études des matrices de la forme $AB - BA$

On note $\mathcal{E} = \left\{AB - BA,\ (A, B) \in E^2\right\} = \left\{C \in E \mid \exists (A, B) \in E^2 \quad C = AB - BA\right\}$.

9. Montrer que $\mathcal{E} \subset \mathrm{Ker}(f)$.
10. Est-ce que $I_2 \in \mathcal{E}$? Justifier votre réponse.
11. Soit $(A, B) \in E^2$, on suppose que $AB - BA = \alpha A$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p B - BA^p = \alpha p A^p$.
12. En déduire que A et A^2 sont dans $\mathrm{Ker}(f)$. Puis que $A^2 = 0_2$.
13. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{E}$.
    Indication : on pourra calculer $E_{1,2} \times E_{2,1}$, $E_{1,2} \times E_{2,2}$ etc.
14. Généraliser la question précédente et montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathcal{E}$.
    On pourra utiliser des matrices triangulaires supérieures/inférieures.

Étude des formes linéaires

15. Soit $A \in E$, vérifier que l'application $\Phi_A\colon \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{C} \\ M & \longmapsto f(AM) \end{cases}$ est linéaire.
16. Montrer que l'application $\Phi\colon \begin{cases} E & \longrightarrow \mathscr{L}(E, \mathbb{C}) \\ A & \longmapsto \Phi_A \end{cases}$ est un isomorphisme.

La dernière question montre que pour tout $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{C})$, il existe une unique matrice $A \in E$ tel que $\varphi = \Phi_A$.