Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4. Il y a autant de segments qui relient deux points du polygone que de paires de sommets. Or, il y a $\binom{n}{2}$ paires de sommets. Donc, $\binom{n}{2}$ segments qui relient deux points du polygone. Un tel segment est soit une diagonale soit un côté du polygone. Comme le polynôme à n côtés, on en déduit qu'il a $\binom{n}{2} - n = \dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

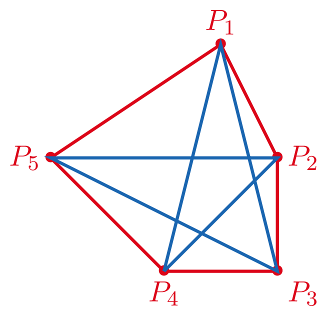

FIGURE 1 – Un polygone à cinq côtés, les segments $[P_1P_2]$, $[P_2P_3]$, $[P_3P_4]$, $[P_4P_5]$ et $[P_5P_1]$ sont les côtés du polygone. Tandis que $[P_1P_3]$, $[P_1P_4]$, $[P_2P_4]$, $[P_2P_5]$, $[P_3P_5]$ sont les diagonales du polygone.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. Une application strictement croissante de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]$ est entièrement caractérisée par son image qui a n éléments (car une telle application est nécessairement injective). En effet, si on a son image, 1 doit s'envoyer sur la plus petite valeur de cette image, 2 sur la deuxième plus petite etc. Il y a donc $\binom{p}{n}$ images possibles donc $\binom{p}{n}$ applications strictement croissantes de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;p]\!]$.

On peut formaliser plus cette preuve (même si je pense que ce n'est pas nécessaire) : On note E l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1\,;n]\!]$ vers $[\![1\,;p]\!]$ et constater que $\varphi\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathscr{P}_n([\![1\,;p]\!]) \\ f \longmapsto f([\![1\,;n]\!]) \end{cases}$ est une bijection et ainsi $|E| = |\mathscr{P}_n([\![1\,;p]\!])| = \binom{p}{n}$ où $\mathscr{P}_n([\![1\,;p]\!])$ désigne l'ensemble des parties de $[\![1\,;p]\!]$ à n éléments.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11. Il faudra faire $p+q$ étapes. À chaque étape, il faudra choisir entre aller vers la droite ou aller vers le haut. Mais il faudra choisir p étapes vers la droite. Il suffit donc de choisir les p étapes où on va aller vers la droite (et les autres étapes on ira en haut). Cela fait $\binom{p+q}{p}$ chemins possibles.

Correction de l'exercice 12.

1. Chaque bille a trois possibilités, ainsi cela fait 3^n possibilités
2. Il faut d'abord choisir le tiroir vide. Cela fait trois possibilités. Disons que c'est le tiroir A qui va être vide. Comptons donc le nombre de possibilités de se répartir les billes entre les tiroirs B et C. Chaque bille aura deux possibilités, cela fait 2^n possibilités, mais il faut retirer le cas où toutes les billes sont allées dans B et le cas où toutes sont allées dans C. Ainsi, il y a $2^n - 2$ possibilités pour que seul le tiroir A soit vide. Au total cela fait donc $3(2^n - 2)$ possibilités.

3. (a) Si on met a billes dans le premier tiroirs avec $a \in [\![0\,;n]\!]$, il reste à choisir le nombre b de billes que l'on met dans le deuxième tiroir, alors comme $b \in [\![0\,;n-a]\!]$ cela laisse $n-a+1$ possibilités pour b (le nombre de billes que l'on met dans le troisième tiroir étant nécessairement $n-a-b$). Il y a donc $\sum_{a=0}^{n}(n-a+1) = \dfrac{((n+1)+1)(n+1)}{2}$ possibilités (somme des termes d'une suite arithmétique).

   (b) Si on veut avoir exactement un tiroir vide. Cela laisse trois possibilités pour choisir ce tiroir. Disons que c'est le tiroir A Ensuite, il faut choisir a le nombre de billes que l'on veut mettre dans le tiroir B), on veut que $a \geqslant 1$ pour que ce tiroir soit non vide et on veut $a \leqslant n-1$ (car le tiroir C doit aussi être non vide). Ainsi, $a \in [\![1\,;n-1]\!]$ cela fait $n-1$ possibilités pour que seul le tiroir A soit vide. Au total, il y a $3(n-1)$ possibilités.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15. On peut découper cette somme suivant le cardinal de X, $|X| \in [\![0\,;n]\!]$. Ainsi,

$$\sum_{X\in\mathscr{P}(E)}|X| = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{X\in\mathscr{P}(E)\\|X|=k}}|X| = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{X\in\mathscr{P}(E)\\|X|=k}}k = \sum_{k=0}^{n}k\times\mathrm{Card}\,\{X\in\mathscr{P}(E)\mid |X|=k\}$$

Or il y a exactement $\binom{n}{k}$ parties de E à k éléments. Ainsi, en utilisant la formule du maire puis celle de Newton

$$\sum_{X\in\mathscr{P}(E)}|X| = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}1^j1^{n-1-j} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Correction de l'exercice 16. 1. En utilisant la formule[1] de $\tan(a-b)$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(\pi/3)-\tan(\pi/4)}{1+\tan(\pi/3)\tan(\pi/4)} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

2. La fonction arctan est strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-\pi/2\,;\pi/2[$. Ainsi, si on note $E = \{x_1, x_2, \dots, x_{13}\}$, alors

$$\arctan(E) = \{\arctan(x_1), \arctan(x_2), \dots, \arctan(x_{13})\} \subset \,]-\pi/2\,;\pi/2[$$

Ainsi, $|\arctan(E)| = 13$. Découpons l'intervalle $]-\pi/2\,;\pi/2[$ qui est de longueur π en douze intervalles de longueur $\pi/12$:

$$\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\subset \bigcup_{k=0}^{11}\left[-\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{12}\,;-\frac{\pi}{2}+\frac{(k+1)\pi}{12}\right[$$

Ainsi, $\arctan(E)$ est un ensemble de 13 nombres et chacun de ces nombres se répartit dans l'un des 12 intervalles. D'après le principe des tiroirs, nécessairement, il y a au moins 2 nombres dans le même intervalle. Ainsi, il existe $(a,b) \in E^2$ et $k \in [\![0\,;11]\!]$ tels que $\arctan(a)$ et $\arctan(b)$ appartiennent au même intervalle : $[-\pi/2+k\pi/12\,;-\pi/2+(k+1)\pi/12[$ avec $a \neq b$. Quitte à échanger a et b de noms, on peut supposer $b < a$. Ainsi, comme arctan est strictement croissante, $\arctan(b) < \arctan(a)$ et donc $\arctan(a)-\arctan(b) > 0$. De plus,

$$\arctan(a)-\arctan(b) \leqslant -\frac{\pi}{2}+\frac{(k+1)\pi}{12}-(-\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{12}) = \frac{\pi}{12}$$

1. Si on se rappelle pas de cette formule, on la retrouve facilement, $\tan(a-b) = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \dfrac{\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)} = \dfrac{\frac{\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

Comme $0 < \arctan(a) - \arctan(b) \leqslant \pi/12$ et que tan est strictement croissante sur $[\,0\,;\pi/12\,] \subset\,]-\pi/2\,;\pi/2\,[$, on obtient $\tan(0) < \tan(\arctan(a) - \arctan(b)) \leqslant \tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$. En appliquant la formule de $\tan(a-b)$, on obtient :

$$0 < \frac{\tan(\arctan(a)) - \tan(\arctan(b))}{1 + \tan(\arctan(a))\tan(\arctan(b))} \leqslant 2 - \sqrt{3}$$

Comme arctan est la bijection réciproque de $\tan_{|]-\pi/2\,;\pi 2\,[}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$. Ainsi,

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2 - \sqrt{3}$$

Correction de l'exercice 17. 1. • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $d^\circ\varphi(P) = d^\circ P(X+1) = d^\circ P \times d^\circ(X+1) \leqslant n \times 1$. Ainsi, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

- Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

  Subséquemment, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Considérons $\psi\colon P \mapsto P(X-1)$, de même que φ, $\psi\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$. Alors pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(\psi(P)) = \varphi(P(X-1)) = P((X+1)-1) = P(X) = P$ et $\psi(\varphi(P)) = \psi(P(X+1)) = P(X+1-1) = P(X)$. En conséquence, $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ et φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Son automorphisme réciproque est $\varphi^{-1} = \psi$.

2. Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $j \in [\![\,0\,;n\,]\!]$,

$$\varphi(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i 1^{j-i} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i + \sum_{i=j+1}^{n} 0X^i$$

   Ainsi, $\binom{j}{i}$ est le coefficient devant X^i (le i-ième vecteur de la base canonique) dans la décomposition de $\varphi(X^j)$ si $i \leqslant j$, et sinon ce coefficient vaut 0. Par conséquent, $m_{i,j} = \binom{j}{i}$ si $j \geqslant i$ et 0 sinon [2]. De même, $n_{i,j} = (-1)^{j-i}\binom{j}{i}$ si $j \geqslant i$ et 0 sinon.

3. Posons $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{K})$. Alors le produit matriciel $A \times M$ est possible et $C = AM \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{K})$. Pour $j \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, par produit matriciel,

$$c_j = \sum_{k=0}^{n} a_k m_{k,j} = \sum_{k=0}^{j} a_k \binom{j}{k} = b_j$$

   Ainsi, $C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$. Dès lors, comme $C = AM$ et que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est inversible, on a $A = CM^{-1} = C\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = CN$. Ainsi, pour tout $j \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, par produit matriciel,

$$a_j = \sum_{k=0}^{n} b_k n_{k,j} = \sum_{k=0}^{j} b_k (-1)^{j-k} \binom{j}{k}$$

4. Il y a j^p fonctions de $[\![\,1\,;p\,]\!]$ vers $[\![\,1\,;j\,]\!]$. En effet, tout élément de $[\![\,1\,;p\,]\!]$ a j possibilités pour son image.
5. Pour choisir une fonction de $[\![\,1\,;p\,]\!]$ vers $[\![\,1\,;j\,]\!]$ de cardinal k, il faut d'abord choisir son image dans $[\![\,1\,;j\,]\!]$, il y a donc $\binom{j}{k}$ images possibles.
   Ensuite, à une image fixée, notée K avec $|K| = k$, les fonctions de $[\![\,1\,;p\,]\!]$ vers K dont le cardinal de l'image est k sont surjectives. Réciproquement les fonctions de $[\![\,1\,;p\,]\!]$ vers K surjectives ont bien une image de cardinal k. Il y en a donc $a_{p,k}$ fonctions de $[\![\,1\,;p\,]\!]$ vers K dont l'image est K.
   Ainsi, en combinant les possibilités, il y a $\binom{j}{k}a_{p,k}$ fonctions de $[\![\,1\,;p\,]\!]$ vers $[\![\,1\,;j\,]\!]$ dont l'image est de cardinal k.

2. Si on se rappelle qu'on a posé, par convention, $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, alors on peut éviter cette disjonction de cas et dire que $M = (\binom{j}{i})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}$ et $N = ((-1)^{j-i}\binom{j}{i})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}$.

6. Comptons les fonctions de $[\![1 ; p]\!]$ vers $[\![1 ; j]\!]$ en les regroupant par le cardinal de leur image. Le cardinal variant de 0 à j. Ainsi, $\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a_{p,k}$ compte une et une fois toutes les fonctions de $[\![1 ; p]\!]$ vers $[\![1 ; j]\!]$. Or, il y a exactement j^p fonctions de $[\![1 ; p]\!]$ vers $[\![1 ; j]\!]$. Dès lors, $j^p = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a_{p,k}$
7. Notons $b_j = j^p$ pour tout $j \in [\![0 ; n]\!]$. Alors, $b_j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a_{p,k}$. En appliquant la formule d'inversion de Pascal, on obtient $a_{p,j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} b_k$. En particulier, il y a $a_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$ applications surjectives de $[\![1 ; p]\!]$ vers $[\![1 ; n]\!]$ si $p \geqslant n$. Si $n > p$, il y a $a_{p,n} = 0$ applications surjectives de $[\![1 ; p]\!]$ vers $[\![1 ; n]\!]$.

Remarque 1. Dans le cours, il y a des formules, relativement simples, qui dénombrent le nombre de bijections et d'injections de E vers F où E et F sont des ensembles finis. Étrangement, il n'y a pas de formules aussi simples pour les surjections, d'où cet exercice.

Remarque 2. Le sujet admet que si $a_{p,j}$ compte le nombre de surjections de $[\![1 ; p]\!]$ vers $[\![1 ; j]\!]$, alors le nombre de surjections de E vers F, si $|E| = p$ et $|F| = j$, est aussi $a_{p,j}$. Ce qui n'est pas si évident a priori.

Notons $S(E, F)$ l'ensemble des surjections de E vers F et donc $S([\![1 ; p]\!], [\![1 ; j]\!])$ le nombre de surjections de $[\![1 ; p]\!]$ vers $[\![1 ; j]\!]$. Si E est de cardinal p, alors il existe φ une bijection de $[\![1 ; p]\!]$ vers E. De même, si F est de cardinal j, alors il existe ψ une bijection de $[\![1 ; j]\!]$ vers F. Soit s une surjection de E vers F, alors par composée de surjections, $\psi^{-1} \circ s \circ \varphi$ est une surjection de $[\![1 ; p]\!]$ vers $[\![1 ; j]\!]$. Ainsi, on peut considérer l'application

$$\begin{cases} S(E, F) \longrightarrow S([\![1 ; p]\!], [\![1 ; j]\!]) \\ \quad s \quad \longmapsto \psi^{-1} \circ s \circ \varphi \end{cases}$$

Cette application est bijective de bijection réciproque (car on vérifie facilement que la composée de ces deux applications, dans les deux sens, vaut l'identité) :

$$\begin{cases} S([\![1 ; p]\!], [\![1 ; j]\!]) \longrightarrow S(E, F) \\ \qquad\quad t \qquad\quad \longmapsto \psi \circ t \circ \varphi^{-1} \end{cases}$$

Ainsi, $|S(E, F)| = |S([\![1 ; p]\!], [\![1 ; j]\!])| = a_{p,j}$.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.

1. Pour $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon. Ainsi, $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$ est une somme de 1 et de 0 et il y a autant de 1 que d'éléments de A. Par conséquent, $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) = |A|$.
2. Soit $x \in E$. Distinguons les cas suivant que x soit dans A ou non :
   - Si $x \in A$, alors $x \notin E \backslash A$. Ainsi, $\mathbb{1}_{E \backslash A}(x) = 0$ et $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 - 1 = 0$. D'où, $\mathbb{1}_{E \backslash A}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$
   - Si $x \notin A$, alors $x \in E \backslash A$ et $\mathbb{1}_{E \backslash A}(x) = 1$ tandis que $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 - 0 = 1$ D'où $\mathbb{1}_{E \backslash A}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$

   Ainsi, $\mathbb{1}_{E \backslash A}$ et $1 - \mathbb{1}_A(x)$ sont deux fonctions définies sur E et à valeurs dans $\{0, 1\}$ qui coïncident en chaque point de E. Par conséquent, ces deux fonctions sont égales : $\mathbb{1}_{E \backslash A} = 1 - \mathbb{1}_A(x)$
3. Soit $x \in E$. Distinguons les cas suivant que x soit dans l'intersection ou non :
   - Si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, alors, $\mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}(x) = 1$ et, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $x \in A_i$ donc $\mathbb{1}_{A_i}(x) = 1$ et donc $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(x) = 1$. Ainsi, $\mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(x)$.
   - Si $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, alors $\mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}(x) = 0$ et il existe $k \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $x \notin A_k$, ainsi, $\mathbb{1}_{A_k}(x) = 0$. Par conséquent, $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(x) = 0$ (au moins un terme dans le produit est nul). Ainsi, $\mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(x)$

Ainsi, $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ et $\mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}$ sont deux fonctions définies sur E et à valeurs dans $\{0,1\}$ qui coïncident en chaque point de E. Ce sont donc deux fonctions égales.

4. Notons $B = E\backslash A$. Soit $x \in E$, alors,

$$\begin{aligned} x \in B \quad &\Longleftrightarrow \quad x \notin A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad x \notin A_i \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad \in E\backslash A_i \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{i=1}^{n} (E\backslash A_i) \end{aligned}$$

Ainsi, $B = \bigcap_{i=1}^{n} (E\backslash A_i)$. En appliquant la question 3, il vient $\mathbb{1}_B = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E\backslash A_i}$. Puis en utilisant la question 2, il vient

$$1 - \mathbb{1}_A = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i}) = (1 - \mathbb{1}_{A_1})(1 - \mathbb{1}_{A_2})(1 - \mathbb{1}_{A_3}) \ldots (1 - \mathbb{1}_{A_n})$$

On cherche maintenant à développer le membre de droite. Ce faisant, on aura une somme de termes. Chaque terme sera un produit de termes qui seront soit des 1 soit des $\mathbb{1}_{A_i}$. On peut regrouper ces termes en faisant des paquets où le nombre de $\mathbb{1}_{A_i}$ dans le produit est constant. Si on note k le nombre de $\mathbb{1}_{A_i}$, alors le produit est de la forme $(-\mathbb{1}_{A_{i_1}})(-\mathbb{1}_{A_{i_2}}) \ldots (-\mathbb{1}_{A_{i_k}})$ avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ et k varie de 0 (on a pris que les 1 en développant et on obtient 1 que l'on va isoler) à n (on a pris tous les $\mathbb{1}_{A_i}$ en développant), ainsi :

$$1 - \mathbb{1}_A = 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{p=1}^{k} (-\mathbb{1}_{A_{i_p}})$$

En utilisant la question 3 :

$$1 - \mathbb{1}_A = 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^k \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}}$$

En simplifiant les 1 et les signes, il vient :

$$\mathbb{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}}$$

Maintenant, en utilisant la question 1 et en permutant les sommes :

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{x \in E} \mathbb{1}(x) \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} \sum_{x \in E} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}| \end{aligned}$$

Remarque 3. Cette formule (appelée crible de Poincaré) peut paraître un peu obscure, écrivons-là en extension pour $n = 2$, 3 ou 4 :

- Si $n = 2$, $A = A_1 \cup A_2$, et $|A| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
- Si $n = 3$, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ et $|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.
- Si $n = 4$, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ et

$$\begin{aligned} |A| = \; & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ & +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ & -|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

Bref, on somme des cardinaux des intersections en mettant de plus en plus d'ensembles avec une alternance des signes (un moins quand il y a un nombre pair d'ensembles dans l'intersection). Pour ceux qui n'aiment pas les indices, on peut condenser en

$$|A| = \sum_{J \in \mathscr{P}([\![1\,;n]\!]) \setminus \{\varnothing\}} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

Correction de l'exercice 20.