Algèbre

1. Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')) &=& f(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')\\ &=& (\lambda x+x',-(\lambda z+z'),(\lambda y+y')+2(\lambda z+z'))\\ &=& \lambda(x,-z,y+2z)+(x',-z',y'+2z')\\ &=& \lambda f(x,y,z)+f(x',y',z') \end{array}$$

Par conséquent, f est linéaire.

2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rclcl} u\in\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff& (f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})(u)=(0,0,0) &\iff& f(u)-u=(0,0,0)\\ &\iff& (x,-z,y+2z)-(x,y,z)=(0,0,0) &\iff& \left\{\begin{array}{lcl} 0&=&0\\ -y-z&=&0\\ y+z&=&0\end{array}\right.\\ &\iff& y+z=0 &\iff& y=-z\\ &\iff& u=(x,-z,z) &\iff& u=x(1,0,0)+z(0,-1,1)\\ &\iff& u\in\operatorname{vect}((1,0,0),(0,-1,1)) && \end{array}$$

Posons $\mathscr{B}_K=((1,0,0),(0,-1,1))$, par double inclusion, on a montré que $\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})=\operatorname{vect}(\mathscr{B}_K)$. Ainsi, $\mathscr{B}_K$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Or, cette famille contient exactement deux vecteurs et ces deux vecteurs sont non colinéaires. Donc, $\mathscr{B}_K$ est libre. Ainsi, $\mathscr{B}_K$ est une base de $\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

3. Notons $\mathscr{B}=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors :
   - $f(1,0,0)=(1,0,0)=1(1,0,0)+0(1,0,0)+0(0,0,1)$
   - $f(0,1,0)=(0,0,1)=0(1,0,0)+0(1,0,0)+1(0,0,1)$
   - $f(0,0,1)=(0,-1,2)=0(1,0,0)+(-1)(1,0,0)+2(0,0,1)$

   Ainsi, $M=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$

4. $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=-1$ (déterminant d'une matrice triangulaire), comme $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\neq 0$, on en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. $(0,-1,2)=0(1,0,0)+1(0,-1,1)+1(0,0,1)$, ainsi les coordonnées de $(0,-1,2)$ dans $\mathscr{B}'$ sont $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

   Alors :
   - $f(1,0,0)=(1,0,0)=1(1,0,0)+0(0,-1,1)+0(0,0,1)$
   - $f(0,-1,1)=(0,-1,1)=0(1,0,0)+1(0,-1,1)+1(0,0,1)$
   - $f(0,0,1)=(0,-1,2)=0(1,0,0)+1(0,-1,1)+1(0,0,1)$

   Ainsi, $T=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

6. Comme :
   - $(1,0,0)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+0(0,0,1)$
   - $(0,-1,1)=0(1,0,0)+(-1)(0,1,0)+1(0,0,1)$
   - $(0,0,1)=0(1,0,0)+0(0,1,0)+1(0,0,1)$

   Notons $P=P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. Alors, d'après la formule de passage $M=PTP^{-1}$. De plus,
   - $(1,0,0)=1(1,0,0)+0(0,-1,1)+0(0,0,1)$
   - $(0,1,0)=0(1,0,0)+(-1)(0,-1,1)+1(0,0,1)$

- $(0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,-1,1) + 1(0,0,1)$

Donc $P^{-1} = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Remarquons que $T = I_3 + E_{2,3}$, de plus, ${E_{2,3}}^2 = 0_3$, ainsi, comme I_3 commute avec $E_{2,3}$, d'après la formule du binome de Newton,

$$T^n = (I_3 + E_{2,3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{{E_{2,3}}^k}_{=0_3 \text{ si } k \geqslant 2} {I_3}^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} {E_{2,3}}^k = I_3 + nE_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus,

$$\begin{aligned} M^n &= PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -n \\ 0 & 1 & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-n & -n \\ 0 & n & n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. (a) Posons $P = I_3$, alors P est inversible et $P^{-1} = I_3$, dès lors, $PAP^{-1} = I_3AI_3 = A$, donc A est semblable à A.

   (b) Supposons que A est semblable à B, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$, donc $AP = PB$, puis $P^{-1}AP = B$, posons alors $Q = P^{-1}$, ainsi, Q est inversible et $Q^{-1} = P$, ainsi, $B = QAQ^{-1}$ donc B est semblable à A.

   (c) Supposons que A soit semblable à B et que B soit semblable à C, alors il existe P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et il existe Q une matrice inversible telle que $B = QCQ^{-1}$, Alors, $A = P(QCQ^{-1})P^{-1}$, posons $R = PQ$, alors R est inversible et $R^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ de sorte que $A = RCR^{-1}$, donc A est semblable à C.

   (d) Supposons que A soit semblable à B donc il existe P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$, alors,

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1})$$

   Or, $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$, de sorte que

$$\det(A) = \det(P)\det(B)\det(P)^{-1} = \det(B)$$

   (e) Par contraposée, si $\det(A) \neq \det(B)$ alors A n'est pas semblable à B.

9. - $\det(T) = 1 \times 1 \times 1 \neq 0$ (matrice triangulaire) donc T est inversible.
   - D'après la question 8d, $\det(A) = \det(T) = 1$ donc A est aussi inversible.
   - De plus, $\det(N) = 0 \times 0 \times 0 = 0$ (matrice triangulaire), donc N n'est pas inversible.

10. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $N^3 = N^2N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$.

    Proposons plusieurs méthodes pour inverser T :

    - Rappelons que si C et D sont deux matrices qui commutent, $C^n - D^n = (C-D)\sum_{k=0}^{n-1} C^kD^{n-k}$, ici on applique ce résultat avec $C = I_3$, $D = -N$ et $n = 3$ ce qui est possible car I_3 et $-N$ commutent dans ce cas, et on obtient :

$$ {I_n}^3 - (-N)^3 = (I_3 - (-N))(I_3 - N + N^2)$$

      Comme $(-N)^3 = -N^3 = 0_3$, on en déduit que $I_n = T \times (I_3 - N + N^2)$, dès lors, $T^{-1} = I_3 - N + N^2$
    - $T \times (I_3 - N + N^2) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \gamma\alpha - \beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ (après calcul) donc $T^{-1} = I_3 - N + N^2$.

- On inverse T en faisant des opérations sur les lignes et en effectuant les mêmes opérations sur I_3 et on trouve que $T^{-1} = I_3 - N + N^2$ (flemme).

Comme $A = PTP^{-1}$, par produit de matrices inversibles, on a

$$A^{-1} = (P^{-1})^{-1}T^{-1}P^{-1} = PT^{-1}P^{-1} = P(I_3 - N + N^2)P^{-1}$$

11. Si $N = 0_3$, alors $T = I_3$ et donc $A = PI_3P^{-1} = I_3$, donc $A = I_3$ est semblable à $A^{-1} = I_3$ d'après la question 8a.
12. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec E de dimension finie. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$
13. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}(w)$, donc il existe $x \in \mathrm{Ker}(u^{i+j})$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$. Alors, $u^i(y) = u^i(u^j(x)) = u^{i+j}(x) = 0_E$ (car $x \in \mathrm{Ker}(u^{i+j})$), dès lors, $y \in \mathrm{Ker}(u^i)$. On a donc montré que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(u^i)$.

    (b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(w)$, alors $w(x) = u^j(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(u^j)$, dès lors, $\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Ker}(u^j)$.

    (c) D'après le théorème du rang appliqué à w, $\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+j}) = \dim(\mathrm{Ker}(w)) + \dim(\mathrm{Im}(w))$. D'après les questions 13a et 13b, $\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Ker}(u^i)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(w)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^i))$ et $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(u^i)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(w)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^j))$, ainsi, par somme d'inégalités

$$\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+j})) = \dim(\mathrm{Ker}(w)) + \dim(\mathrm{Im}(w)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^i)) + \dim(\mathrm{Ker}(u^j))$$

14. (a) D'après le théorème du rang $3 = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.

    (b) En appliquant 13c avec $i = j = 1$, on obtient $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$. En appliquant 13c avec $i = 2$ et $j = 1$, on obtient $\dim(\mathrm{Ker}(u^3)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^2)) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Comme $u^3 = 0$, $\mathrm{Ker}(u^3) = E$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(u^3)) = 3$, ainsi, $2 \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^2))$. Par double inégalité, $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2$

    (c) Comme $\mathrm{Ker}(u^2) \subset E$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) < \dim(E)$, on peut en conclure, que $\mathrm{Ker}(u^2) \neq E$, ainsi, il existe $a \in E \backslash \mathrm{Ker}(u^2)$, comme $0_E \in \mathrm{Ker}(u^2)$, $a \neq 0$, comme $a \notin \mathrm{Ker}(u^2)$, $u^2(a) \neq 0_E$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $\lambda_1 u^2(a) + \lambda_2 u(a) + \lambda_3 a = 0_3$.
    - En composant par u^2, on obtient, $\lambda_1 u^4(a) + \lambda_2 u^3(a) + \lambda_3 u^2(a) = 0_E$, comme $u^3 = 0$, $u^4 = u^3 \circ u = 0$, donc $\lambda_3 u^2(a) = 0_E$, comme $u^2(a) \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_3 = 0$.
    - Ainsi, $\lambda_1 u^2(a) + \lambda_2 u(a) = 0_E$, en composant par u, il vient $\lambda_2 u^2(a) = 0_E$, comme $u^2(a) \neq 0_E$, $\lambda_2 = 0$
    - Il en découle que $\lambda_1 u^2(a) = 0_E$. Encore une fois $u^2(a) \neq 0_E$ donc $\lambda_1 = 0$

    Ainsi, $\mathscr{B}_a = (u^2(a), u(a), a)$ est une famille libre de plus, $|\mathscr{B}_a| = 3 = \dim(E)$, donc $\mathscr{B}_a$ est une base de E.

    (d)
    - $u(u^2(a)) = 0_E = 0u^2(a) + 0u(a) + 0a$
    - $u(u(a)) = u^2(a) = 1u^2(a) + 0u(a) + 0a$
    - $u(a) = u(a) = 0u^2(a) + 1u(a) + 0u(a)$

    donc $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, comme on sait que $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a(f)}$ est linéaire et que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(g)$, on peut en déduire que

$$V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u^2 - u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u)^2 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. (a) D'après le théorème du rang, $3 = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$.

    (b) Comme $\mathrm{rg}(u) = 1$, $u \neq 0$, donc il existe $b \in E$ tel que $u(b) \neq 0_E$, comme $u(0_E) = 0_E$, en particulier $b \neq 0_E$.

    (c) $u(u(b)) = u^2(b) = 0_E$, donc $u(b) \in \mathrm{Ker}(b)$, comme $u(b) \neq 0_E$, $(u(b))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(b)$ on peut la compléter en une base de $\mathrm{Ker}(b)$, nécessairement une telle base contient deux vecteurs, ainsi, en notant c un tel vecteur, $(u(b), c)$ est donc libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $\lambda_1 b + \lambda_2 u(b) + \lambda_3 c = 0_E$.
    - En composant par u, il vient, $\lambda_1 u(b) + \lambda_2 u^2(b) + \lambda_3 u(c) = 0_E$, donc $\lambda_1 u(b) = 0_E$. Comme $u(b) \neq 0_E$, $\lambda_1 = 0$.

- Ainsi, $\lambda_2 u(b)+\lambda_3 c=0_E$. Or, $(u(b),c)$ est libre, on en déduit que $\lambda_2=\lambda_3=0$.

Par conséquent, $\mathscr{B}_b=(b,u(b),c)$ est une famille libre de E de plus, $|\mathscr{B}_b|=3=\dim(E)$, on en déduit que $\mathscr{B}_b$ est une base de E.

(d)
- $u(b)=0b+1u(b)+0c$
- $u(u(b))=0_E=0b+0u(b)+0c$
- $u(c)=0_E=0b+0u(b)+0c$

Donc $U'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_b}(u)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. De plus,

$$V'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_b}(u^2-u)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_b}(u)^2-\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_b}(u)=U'^2-U'=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

16. (a) Soit $\mathscr{B}$ une base quelconque de E, d'après le cours $f\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ vers $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En particulier, il existe $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=N$. Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^3)=N^3=0_3$, d'après la question 10. Par injectivité, $u^3=0$. De plus, $\mathrm{rg}(u)=\mathrm{rg}(N)=2$. On peut donc appliquer le résultat des questions 14c et 14d, il existe a tel que $\mathscr{B}_a=(u^2(a),u(a),a)$ soit une base de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u)=U$. Par formule de changement de base, $N=PUP^{-1}$ avec $P=P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_a}$. Ainsi, N est semblable à $U=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(b) Comme $M=N(N-I_3)$ et que N et $N-I_3$ commutent, $M^3=N^3(N-I_3)^3=0_3(N-I_3)=0_3$. De plus,

$$M=N^2-N=(PUP^{-1})^2-PUP^{-1}=PU^2P^{-1}-PUP^{-1}=P(U^2-U)P^{-1}=PVP^{-1}$$

Or, multiplier par une matrice inversible (à gauche ou à droite) ne change pas le rang, donc $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(PVP^{-1})=\mathrm{rg}(VP^{-1})=\mathrm{rg}(V)$. Or, V contient une colonne nulle ainsi que deux colonnes non colinéaires, donc $\mathrm{rg}(V)=2$. Ainsi, $\mathrm{rg}(M)=2$.

(c) En appliquant le résultat de la question 16a à M (car cette matrice vérifie les mêmes propriétés que N : à savoir $M^3=0_3$ et $\mathrm{rg}(M)=2$), on peut en déduire que M est semblable à U. Comme de plus, U est semblable à N (question 8b), on en déduit d'après la question 8c, que M est semblable à N.

(d) D'après ce qui précède, il existe Q une matrice inversible telle que $M=QNQ^{-1}$. Ainsi, en utilisant la question 10,

$$\begin{aligned}A^{-1}&=PTP^{-1}=P(I_3+M)P^{-1}=P(I_3+QNQ^{-1})P^{-1}\\&=P(QI_3Q^{-1}+QNQ^{-1})P^{-1}=P(Q(I_3+N)Q^{-1})P^{-1}=(PQ)(I_3+N)(PQ)^{-1}\end{aligned}$$

Ainsi, A^{-1} est semblable à T, T est semblable à A donc A^{-1} est semblable à A (question 8c).

17.

18. Prenons $A=-I_3$, alors A est inversible et $A^{-1}=-I_3$, ainsi, d'après la question 8a, A est semblable à $A=A^{-1}$. Supposons que A soit semblable à une matrice $T=\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&1&\gamma\\0&0&1\end{pmatrix}$, alors il existe P une matrice inversible telle que $-I_3=PTP^{-1}$, donc $T=P^{-1}(-I_3)P=-P^{-1}P=-I_3$ donc comme deux matrices égales ont mêmes coefficients, il en découle que $1=-1$ ce qui est absurde. La réciproque est donc fausse.

Analye

1. Comme f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ donc le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}_+$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,

$$f'(x)=\frac{1(\mathrm{e}^x+1)-x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\frac{(1-x)\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$$

2. Posons $g\colon x \mapsto (1-x)\mathrm{e}^x + 1$, par produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = -x\mathrm{e}^x \leqslant 0$, De plus, comme g' s'annule qu'en 0, on peut en déduire que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Remarquons que $g(1) = 1$ et $g(2) = 1 - \mathrm{e}^2 < 0$, ainsi, $g(2) < 0 < g(1)$, comme g est continue sur $[\,1\,;2\,]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [\,1\,;2\,]$ tel que $g(\alpha) = 0$, comme $g(2) < g(\alpha) = 0 < g(1)$, on peut aussi affirmer que $\alpha \in \,]\,1\,;2\,[$. De plus, comme g est strictement décroissante, elle est injective, donc g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$. De plus, comme, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$, $f'(x) = 0$ ssi $g(x) = 0$ ssi $x = \alpha$. Dès lors, f' s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$.

3.
```python
import numpy as np

def g(x):
    return (1-x)*np.exp(x)+1

def Dichotomie(epsilon):
    assert epsilon > 0
    a=1# g(a)>0
    b=2# g(b)<0
    while b-a>epsilon:
        c=(a+b)/2
        if g(c)<0:# alors g(c) < 0 < g(a)
            b=c#on regarde g sur [a,c]
        else:# alors g(b)< 0 <= g(c)
            a=c#on regarde g sur [b,c]
    return a
```

4. On a $(1-\alpha)\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0$, comme $1 - \alpha < 0$, on a $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ donc

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1} = \frac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1} + 1} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 + (\alpha - 1)} = \alpha - 1$$

5. Commençons par faire le $DL_2(0)$ d'exponentielle [1] :

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x}{1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) + 1} = \frac{x}{2 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)}$$

On pose alors $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, alors $u^2 = \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$, comme $u^2 \sim \dfrac{x^2}{4}$, $o(u^2) = o(x^2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{2} \times \frac{1}{1+u} = \frac{x}{2}(1 - u + u^2 + o(u^2)) \\
&= \frac{x}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) + \left(\frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) + o(x^2)\right] \\
&= \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3)
\end{aligned}$$

6. Ainsi, par troncature à l'ordre 1, $y = \dfrac{x}{2}$ est la tangente de f en 0, $f(x) - \dfrac{x}{2} \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^4}{4}$, comme deux fonctions équivalentes en 0 ont même signe au voisinage de 0, on en déduit que f est en dessous de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

1. À l'ordre 2, car on a anticipé le x au numérateur qui fera gagner un ordre à la toute fin.

7. Comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x \in [0;\alpha[$, $g(x) > g(\alpha) = 0$, ainsi, f' est strictement positive sur $[0;\alpha[$ et $f'(\alpha) = 0$, donc f est strictement croissante sur $[0;\alpha]$. De même, comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) < g(\alpha) = 0$, ainsi, $f'(x) < 0$ et $f'(\alpha) = 0$, donc f est strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.
De plus, $f(0) = 0$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (par croissance comparée).

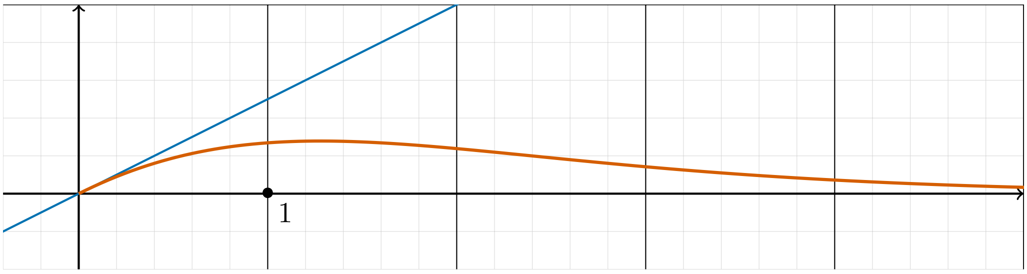

Figure 1 – La courbe de f en rouge avec la tangente en 0 en bleu.

8. Notons $m\colon x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$, par quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas f est de classe $\mathscr{C}^n$ tout comme m. De plus, $m^{(0)}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$, tandis que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $m^{(i)}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x$. Appliquons la formule de Leibniz à $f \times m\colon x \mapsto x$, (avec $n \geqslant 2$) :
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} m^{(n-i)} = 0$$
En isolant le terme pour $i = n$, il vient
$$f^{(n)}\colon x \mapsto \frac{-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} f^{(i)}(x)$$
9. Comme f est strictement croissante et continue sur $[0;\alpha]$, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, f réalise une bijection de $[0;\alpha]$ vers $J = f([0;\alpha]) = [f(0);f(\alpha)] = [0;\alpha-1]$
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $0 \leqslant \dfrac{\alpha-1}{n} \leqslant \alpha - 1$, il en découle que $\dfrac{\alpha-1}{n} \in J$, or, f réalise une bijection de $[0;\alpha]$ vers J, ainsi, $\dfrac{\alpha-1}{n}$ admet un unique antécédent dans $[0;\alpha]$. Ainsi, il existe un unique $u_n \in [0;\alpha]$ tel que $f(u_n) = \dfrac{\alpha-1}{n}$. Remarquons que $u_n = h\left(\dfrac{\alpha-1}{n}\right)$.
11. Comme f est strictement croissante sur $[0;\alpha]$, on en déduit que h est aussi strictement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, remarquons que $\dfrac{\alpha-1}{n+1} < \dfrac{\alpha-1}{n}$, par croissance stricte de h, on en déduit que
$$h\left(\frac{\alpha-1}{n+1}\right) < h\left(\frac{\alpha-1}{n}\right)$$
Donc $u_{n+1} < u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.
12. Comme f est continue sur $[0;\alpha]$, h est aussi continue sur J en particulier en 0, or, $\dfrac{\alpha-1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité en 0, $h\left(\dfrac{\alpha-1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(0)$, or $f(0) = 0$, donc $h(0) = 0$, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
13. La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1/2 \neq 0$, d'après le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque, on en déduit que h est dérivable en $0 = f(0)$ et que
$$h'(0) = \frac{1}{f'(h(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 2$$
Dès lors, comme h est dérivable en 0, h admet un $DL_1(0)$:
$$h(x) \underset{0}{=} h(0) + xh'(0) + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x$$
En particulier, $h\left(\dfrac{\alpha-1}{n}\right) \sim 2\dfrac{\alpha-1}{n}$. On en déduit que $u_n \sim 2\dfrac{\alpha-1}{n}$

14. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $k(x) = x$ ssi $1 + \mathrm{e}^{-x} = x$ ssi $\mathrm{e}^x + 1 = x\mathrm{e}^x$ ssi $\mathrm{e}^x(1-x)+1 = 0$ ssi $g(x) = 0$ ssi $x = \alpha$
15. Comme $\alpha > 1$, $\alpha = k(\alpha) = 1+\mathrm{e}^{-\alpha} < 1+\mathrm{e}^{-1}$ (par croissance stricte d'exponentielle), ainsi, $\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$
16. Remarquons que k est continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$, dérivable sur $]\,1\,;+\infty\,[$, de plus pour tout $x > 1$,

$$|k'(x)| = |-\mathrm{e}^{-x}| = \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{-1}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, k est e^{-1}-lipschitzienne sur $[\,1\,;+\infty\,[$. En particulier, pour tout $x \geqslant 1$, $|k(x) - k(\alpha)| \leqslant \mathrm{e}^{-1}|x - \alpha|$ comme $k(\alpha) = \alpha$, $|k(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1}|x-\alpha|$
17. Remarquons que $[\,1\,;+\infty\,[$ est un intervalle stable par k, en effet si $x \geqslant 1$, $k(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [\,1\,;+\infty\,[$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$|v_n - \alpha| \leqslant e^{-(n+1)}$»
   - Pour $n = 0$, $|v_0 - \alpha| = \alpha - 1 < e^{-1}$ (question 15) donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, comme $v_n \geqslant 1$, d'après la question 16, il en découle que

   $$|v_{n+1} - \alpha| = |k(v_n) - \alpha| \leqslant e^{-1}|v_n - \alpha| \underset{\mathscr{P}(n)}{\leqslant} e^{-1}e^{-n-1} = \mathrm{e}^{-(n+2)}$$

   Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \alpha| \leqslant e^{-n-1}$
18. Comme $e^{-n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par le théorème des gendarmes, on en déduit que $v_n - \alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, il suffit d'approximer α par v_n avec n assez grand :

```
import numpy as np

def Approximation(epsilon):
    assert epsilon > 0
    v = 1# v = v_0
    E = np.exp(-1)#majoration de l'erreur pour n = 0
    r = np.exp(-1)
    while E > epsilon:
        v = 1+np.exp(-v)#v_{n+1}=k(v_n)
        E = E*r# la majoration de l'erreur est une suite géométrique de raison r
    #Quand la boucle while s'arrête, cela veut dire que e^{-n-1}<epsilon
    #donc que |v_n-alpha| < epsilon
    return v
```

19. Dans la dichotomie, l'erreur est majorée par 2^{-n}, dans la méthode qui précède l'erreur est majorée par e^{-n-1}, comme $\mathrm{e}^{-n-1} = o(2^{-n})$, on en déduit que la seconde méthode converge plus rapidement.