

Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11. 1. À chaque appel, le client a une probabilité de p pour avoir un retard, chaque appel suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$. Comme il y a 8 appels indépendants, $X \sim \mathcal{B}(8, 1/4)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X) = np = 2$ et $\mathbb{V}(X) = np(1 - p) = \frac{3}{2}$.

2. Observons que $M(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Numérotons les clients de 1 à 8 et disons que ce sont les clients 7 et 8 qui ont eu un retard. On appelle quatre clients au hasard, cela revient donc à choisir une partie à quatre éléments dans $\llbracket 1 ; 8 \rrbracket$. Il y a $\binom{8}{4}$ donc possibilités et ces possibilités sont équiprobables.

- $M = 0$ lorsqu'il n'y a pas de client mécontents, c'est-à-dire lorsqu'on a appelé quatre clients parmi les 6 premiers, il y a donc $\binom{6}{4}$ possibilités. Ainsi,

$$\mathbb{P}(M = 0) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{14}$$

- $M = 2$ lorsqu'il y a les clients 7 et 8 dans le groupe des quatre appelés, il faut donc appeler 7 et 8 ainsi que 2 autres clients parmi les 6 premiers, cela fait donc $\binom{6}{2}$ possibilités. Donc

$$\mathbb{P}(M = 2) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{14}$$

- $\mathbb{P}(M = 0) + \mathbb{P}(M = 1) + \mathbb{P}(M = 2) = 1$. Ainsi¹, $\mathbb{P}(M = 1) = 1 - \mathbb{P}(M = 0) - \mathbb{P}(M = 2) = \frac{4}{7}$.

$$\mathbb{E}(M) = 0\mathbb{P}(M = 0) + 1\mathbb{P}(M = 1) + 2\mathbb{P}(M = 2) = 1$$

Correction de l'exercice 12. À chaque tirage, le joueur a une probabilité de $p = 8/10 = 4/5$ d'avoir une boule rouge. Et comme il y a remise, ce tirage est indépendant des autres, comme il y a n tirages, on en déduit que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = np = 4n/5$ et $\mathbb{V}(X_n) = np(1 - p) = 4n/25$.

1. On peut aussi raisonner combinatoirement : $M = 1$ ssi il y a un client mécontent parmi les 2 et trois clients content parmi les 6, ainsi $\mathbb{P}(M = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{4}{7}$.

Comme X_n est le nombre de boules rouges tirées (qui rapportent chacune 2 points) et $n - X_n$ est le nombre de boules blanches tirées (qui lui font perdre chacune 3 points), on a

$$Y_n = 2X_n - 3(n - X_n) = 5X_n - 3n = f(X_n)$$

Si on pose $f: x \mapsto 5x - 3$. On sait que $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$, ainsi $Y_n(\Omega) = f(\llbracket 0; n \rrbracket) = \{5k - 3 \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$. Soit $y \in Y_n(\Omega)$, comme f est strictement croissante, il existe un unique $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $y = f(k) = 5k - 3$, alors

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{n-k} = \binom{n}{(y+3)/5} \frac{4^{\frac{y+3}{5}}}{5^n}$$

De plus, comme $Y_n = 5X_n - 3n$, on a, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y_n) = 5\mathbb{E}(X_n) - 3n = 4n - 3n = n$. Et $\mathbb{V}(Y_n) = 25\mathbb{V}(X_n) = 4n$.

Correction de l'exercice 13. Y_n suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$, ainsi $\mathbb{E}(Y_n) = n/2$ et $\mathbb{V}(Y_n) = n/4$. On remarque que $X_n = 1 \times Y_n + 2 \times (n - Y_n) = 2n - Y_n$. Ainsi, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(2n - Y_n) = 2n - \mathbb{E}(Y_n) = 2n - n/2 = 3n/2$$

Et $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(2n - Y_n) = \mathbb{V}(Y_n) = n/4$. De plus, on remarque que $X_n = f(Y_n)$, avec $f: x \mapsto 2n - x$. Comme $Y_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$, on en déduit que $X_n(\Omega) = \{f(0), f(1), \dots, f(n)\} = \{2n, 2n - 1, \dots, n\} = \llbracket n; 2n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket n; 2n \rrbracket$, alors

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(2n - Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_n = 2n - k) = \binom{n}{2n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{2n-k} \frac{1}{2^n}$$

Correction de l'exercice 14. Posons $f: x \mapsto \frac{1}{1+x}$, définie sur $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$. Ainsi, $\frac{1}{1+X} = f(X)$, en appliquant la formule de transfert :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^n f(k) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or d'après la formule du maire, $(k+1) \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \binom{n}{k}$ ², Ainsi, $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$. Dès lors

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^{j-1} (1-p)^{n+1-j}$$

Pour reconnaître du binôme de Newton, on aurait besoin d'un p^j et non d'un p^{j-1} , on peut multiplier et diviser par p , encore faut-il que p soit non nul, on va donc distinguer deux cas :

- Si $p = 0$, alors pour tout $j \geq 2$, $p^{j-1} = 0$, dans la somme il ne reste donc plus que le terme pour $j = 1$, donc³

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{1} \times 1 \times 1 = 1$$

- Si $p \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \frac{1}{(n+1)p} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^j (1-p)^{n+1-j} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)p} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^j (1-p)^{n+1-j} - \binom{n+1}{0} p^0 (1-p)^{n+1-0} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)p} \left((p + (1-p))^{n+1} - (1-p)^{n+1} \right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p} \end{aligned}$$

2. Passez par les factorielles si vous le préférez.

3. On pouvait aussi remarquer que si $p = 0$, alors $X = 0$ (X quasi-certaine égale à 0), ainsi $Y = 1$ et donc $\mathbb{E}(Y) = 1$.

Correction de l'exercice 15. On sait que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k)$. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Comme X ne prend que des valeurs entières, on a $(X > k - 1) = (X = k) \cup (X > k)$. Et cette union est disjointe, car X ne peut pas être à la fois égale à k et strictement plus grand que k . Ainsi, $\mathbb{P}(X > k - 1) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X > k)$. Donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k (\mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)) \\ &= \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X > k - 1) - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{j=-1}^{n-1} (j + 1)\mathbb{P}(X > j) - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= (-1 + 1)\mathbb{P}(X > -1) + \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1)\mathbb{P}(X > k) - k\mathbb{P}(X > k) + (n - 1)\mathbb{P}(X > n) \end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(X > n) = 0$. On a donc prouvé que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$.

Correction de l'exercice 16. Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de gens dans le premier train, comme chaque personne a une chance sur deux d'aller dans le premier train et que chaque personne choisit indépendamment, $X \sim \mathcal{B}(1600, 1/2)$. Notons s le nombre de sièges dans le premier train (qui est égale au nombre de sièges dans le second train). Il y a X personne dans le premier train et $1600 - X$ dans le second train. Notons A l'évènement «aucun des voyageurs n'est obligés de rester debout». On a alors

$$A = (X \leq s) \cap (1600 - X \leq s)$$

Or on sait que $\mathbb{E}(X) = 1600/2 = 800$, ainsi en retranchant l'espérance de X , on obtient

$$A = (X - \mathbb{E}(X) \leq s - 800) \cap (\mathbb{E}(X) - X \leq s - 800)$$

Rappelons que $|x| \leq y$ ssi $x \leq y$ et $-x \leq y$. On obtient donc $A = (|X - \mathbb{E}(X)| \leq s - 800)$. Et on cherche s tel que $\mathbb{P}(\bar{A}) \leq 10^{-2}$. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev⁴, on sait que

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > s - 800) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq s - 800) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{(s - 800)^2} = \frac{400}{(s - 800)^2} = \left(\frac{20}{s - 800}\right)^2$$

Et on souhaite trouver s tel que $\left(\frac{20}{s - 800}\right)^2 \leq 10^{-2}$. C'est le cas ssi $\frac{20}{s - 800} \leq \frac{1}{10}$ ssi $200 \leq s - 800$ ssi $s \geq 1000$. Ainsi, si chacun des deux trains contient au moins 1000 places assises, la probabilité que l'un des voyageurs soient obligés de rester debout est inférieur à 1%.

Correction de l'exercice 17. On sait que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0$, donc $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.

Correction de l'exercice 18. 1.

- 2.
- 3.
- 4.

4. Pour cela, il est nécessaire de supposer que $s > 800$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \\ \mathbb{P}(X_n = 5) \\ \mathbb{P}(X_n = 6) \end{pmatrix}$, et $L = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$. On remarque que $\mathbb{E}(X_n) = LA_n$.

De plus, d'après les relations de la question précédente, $A_{n+1} = MA_n$ en définissant la matrice M par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$$

On a alors $\mathbb{E}(X_{n+1}) = LA_{n+1} = LMA_n = (LM)A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 3 & \frac{11}{3} & \frac{13}{3} & 5 \end{pmatrix} A_n$ Or,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 3 & \frac{11}{3} & \frac{13}{3} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}L$$

On observe que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_n = 1$, ainsi $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3}LA_n = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)$. La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Remarquons que $\ell = \frac{2}{3}\ell + 1$ ssi $\frac{1}{3}\ell = 1$ ssi $\ell = 3$, ainsi

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_{n+1}) &= \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1 \\ \ell &= \frac{2}{3}\ell + 1 \end{cases}$$

Par différence, $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \ell = \frac{2}{3}(\mathbb{E}(X_n) - \ell)$. Ainsi, $(\mathbb{E}(X_n) - 3)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $2/3$
Dès lors, $\mathbb{E}(X_n) - 3 = (\mathbb{E}(X_1) - 3)(2/3)^{n-1}$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X_n) = 3 + (\mathbb{E}(X_1) - 3)(2/3)^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3$.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21. 1. On note B_i l'évènement la i -ième boule tirée est noire. On remarque que comme il y a quatre boules rouges et que le tirage est sans remise, on tirera la première boule noire soit au premier tirage, soit au deuxième, soit au troisième, soit au quatrième soit au cinquième. Ainsi, $X(\Omega) = \llbracket 1; 5 \rrbracket$.

- $(X_1 = 1)$ veut dire que dès le premier tirage on a tiré une boule noire donc $(X_1 = 1) = B_1$, ainsi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = 3/7$.
- L'évènement $(X_1 = 2)$ veut dire qu'il a fallu 2 tirages pour atteindre la première boule noire, ainsi cet évènement est réalisé ssi la première boule était blanche et si la deuxième est noire, dès lors $(X_1 = 2) = \overline{B_1} \cap B_2$ donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(B_2 | \overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

- De même ($X_1 = 3$) veut dire qu'il a fallu trois tirages avant d'obtenir la première boule noire donc que les deux premières étaient rouges donc $(X_1 = 3) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$ ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \mathbb{P}(B_3 | \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \mathbb{P}(\overline{B_2} | \overline{B_1}) \mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{6}{35}$$

- De même ($X_1 = 4$) veut dire qu'il a fallu quatre tirages avant d'obtenir la première boule noire donc que les trois premières étaient rouges donc $(X_1 = 4) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4$ ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X_1 = 4) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4) = \mathbb{P}(B_4 | \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}) \mathbb{P}(\overline{B_3} | \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \mathbb{P}(\overline{B_2} | \overline{B_1}) \mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{35}$$

- Enfin ($X_1 = 5$) veut dire qu'il a fallu cinq tirages avant d'obtenir la première boule noire donc que les quatre premières étaient rouges donc $(X_1 = 5) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap B_5$ ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X_1 = 5) = \mathbb{P}(B_5 | \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4}) \mathbb{P}(\overline{B_4} | \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}) \mathbb{P}(\overline{B_3} | \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \mathbb{P}(\overline{B_2} | \overline{B_1}) \mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{35}$$

On a donc trouvé la loi de ⁵ X_1 . De plus,

$$\mathbb{E}(X_1) = 1\mathbb{P}(X_1 = 1) + 2\mathbb{P}(X_1 = 2) + 3\mathbb{P}(X_1 = 3) + 4\mathbb{P}(X_1 = 4) + 5\mathbb{P}(X_1 = 5) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{18}{35} + \frac{12}{35} + \frac{5}{35} = 2$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \mathbb{E}(X_1^2) - 4$, or on calcule $\mathbb{E}(X_1^2)$ grâce à la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(X_1^2) = 1\mathbb{P}(X_1 = 1) + 4\mathbb{P}(X_1 = 2) + 9\mathbb{P}(X_1 = 3) + 16\mathbb{P}(X_1 = 4) + 25\mathbb{P}(X_1 = 5) = \frac{3}{7} + \frac{8}{7} + \frac{54}{35} + \frac{48}{35} + \frac{25}{35} = \frac{26}{5}$$

$$\text{Et donc } \mathbb{V}(X_1) = \frac{26}{5} - 4 = \frac{6}{5}.$$

2. Remarquons que $X_2 > X_1$ et que comme il y a que 4 boules rouges, en six tirages on est sûr d'avoir deux boules noires, donc que $X_2 \leq 6$. On va donc calculer $\mathbb{P}((X_1 = a) \cap (X_2 = b))$ pour tout couple (a, b) tel que $1 \leq a < b \leq 6$:

- Remarquons que $((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) = B_1 \cap B_2$, ainsi

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_2 | B_1) \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

- Remarquons que $((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$, ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \mathbb{P}(B_3 | B_1 \cap \overline{B_2}) \mathbb{P}(\overline{B_2} | B_1) \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{4}{35}$$

- Remarquons que $((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$, ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \mathbb{P}(B_3 | B_1 \cap \overline{B_2}) \mathbb{P}(\overline{B_2} | B_1) \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{4}{35}$$

3. Que représente T ? Donner son espérance.
4. Donner la loi conjointe de (T, X_1) puis la loi de T .
5. Donner la loi de X_3 .

5. On vérifie que $\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 3) + \mathbb{P}(X_1 = 4) + \mathbb{P}(X_1 = 5) = 1$

$X_2 \setminus X_1$	1	2	3	4	5
2	1/7	0	0	0	0
3	4/35		0	0	0
4				0	0
5					0
6					

Correction de l'exercice 22. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note N_i l'évènement on a tiré une boule noire lors du i -ième tirage.

- Remarquons que $\mathbb{P}(X = 2 \cap Y = 2) = 0$.
 - $(X = 2) = \overline{N_1} \cap N_2$, ainsi $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(N_2 | \overline{N_1})\mathbb{P}(\overline{N_1}) = \frac{2}{n-1} \frac{n-2}{n} \neq 0$,
 - $(Y = 2) = N_2 \cap N_1$, $\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(N_2 | N_1)\mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{n-2} \frac{2}{n-1} \neq 0$.

Ainsi, $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 2)$. Par conséquent, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

- Soit $x \in X(\Omega) = \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $y \in Y(\Omega) = \llbracket 2; n \rrbracket$. Si $y \leq x$, $\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = 0$. Si $y > x$, alors $(X = x) \cap (Y = y) = \bigcap_{i=1}^n A_i$ avec $A_x = N_x$, $A_y = N_y$ et $A_i = \overline{N_i}$ si $i \neq x$ et $i \neq y$. Alors d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(A_1) \times \prod_{i=2}^n \mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{i=1}^n A_j\right)$$

Il y a n termes dans ce produit. Chacun de ces termes se calculent de la façon suivante : nombre de boules qui restent dans la couleur que l'on veut tirer divisé par le nombre total de boules qui restent. Après i tirages, il reste $n - i$ boules. Ainsi, les dénominateurs seront successivement $n, n - 1, n - 2, \dots, 2$ et 1 . Lorsque $i = x$, le numérateur vaudra 2, quand $i = y$, le numérateur vaudra 1. Sinon le numérateur sera le nombre de boules blanches restantes : $n - 2, n - 3, \dots, 2$ et 1 . Ainsi, si on réarrange les termes :

$$\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \frac{2 \times 1 \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1}{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1} = \frac{2}{n(n-1)}$$

- Soit $x \in X(\Omega) = \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \sum_{y=2}^n \mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \sum_{y=x+1}^n \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-x)}{n(n-1)}$$

Soit $y \in Y(\Omega) = \llbracket 2; n \rrbracket$, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \sum_{x=1}^n \mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \sum_{x=1}^{y-1} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(y-1)}{n(n-1)}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) = n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

En appliquant la formule de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^2 \right) = \frac{n(2n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n}{6}(4n-2-3(n-1)) = \frac{n}{6}(n+1)\end{aligned}$$

Par la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \dots$

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26. 1. X est le nombre de succès de n expériences indépendantes dont la probabilité de succès est p , ainsi X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

2. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, si $j + k > n$, alors $\mathbb{P}(Y = j | X = k) = 0$ (car il ne peut avoir k réponses connues par l'étudiant et j réponses justes mais donnée au hasard sur un total de n questions). Si $j + k \leq n$, alors sachant que $(X = k)$, l'étudiant a $n - k$ questions auxquelles il doit répondre au hasard, chacune de ces questions à une chance sur quatre d'être correcte. On compte donc le nombre de succès dans la répétition de $n - k$ questions et la probabilité d'un succès est $1/4$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y = j | X = k) = \binom{n-k}{j} \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k-j}$.

3. Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, alors comme $(X = k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est un système complet d'évènements :

$$(Z = i) = \bigcup_{k=0}^n (X = k) \cap (X + Y = i) = \bigcup_{k=0}^n (X = k) \cap (Y = i - k) = \bigcup_{k=0}^i (X = k) \cap (Y = i - k)$$

4. Comme l'union est formée d'évènements deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = i) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = i - k)) = \sum_{k=0}^i \mathbb{P}(Y = i - k | X = k) \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^i \binom{n-k}{i-k} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-k} \left(\frac{3}{4}\right)^{(n-k)-(i-k)} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^i \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-i} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-i} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-p)^{n-i} \sum_{k=0}^i \frac{i!}{k!(i-k)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-k} p^k (1-p)^{i-k} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-i} \binom{n}{i} (1-p)^{n-i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} p^k \left(\frac{1-p}{4}\right)^{i-k} = \binom{n}{i} \left(\frac{3}{4}(1-p)\right)^{n-i} \left(p + \frac{1-p}{4}\right)^i \\ &= \binom{n}{i} \left(\frac{3-3p}{4}\right)^{n-i} \left(\frac{1+3p}{4}\right)^i\end{aligned}$$

Ainsi, Z suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1+3p}{4}$.

5. Ainsi, $\mathbb{E}(Z) = n \frac{1+3p}{4}$. Ainsi, $\mathbb{E}(Z) \geq n/2$ ssi $1+3p \geq 2$ ssi $p \geq 1/3$. Ainsi, si l'étudiant est capable de répondre avec une probabilité de une sur trois à chacune des questions et en cochant au hasard pour les autres questions, $\mathbb{E}(Z) \geq n/2$.

Correction de l'exercice 27.

Correction de l'exercice 28.

Correction de l'exercice 29.