Marchons dans les mines de la Moria (a.k.a. «fuyez pauvres fous !»)

1. Par définition de l'espérance, $\mathbb{E}(X_k) = 1\mathbb{P}(X_k = 1) + (-1)\mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. De plus, par définition de la variance, $\mathbb{V}(X_k) = \mathbb{E}((X_k - \mathbb{E}(X_k))^2) = \mathbb{E}((X_k - 0)^2) = \mathbb{E}(1) = 1$
2. Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$
De plus, par somme de variables aléatoires deux à deux non corrélées (car indépendantes),
$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$
3. $(X_1 = 1)$ et $(X_1 = -1)$ sont deux évènements qui forment un système complet d'évènements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(S_2 = 2) & = & \mathbb{P}(S_2 = 2 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(S_2 = 2 \cap X_1 = -1) \\
& = & \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 2 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 2 \cap X_1 = -1) \\
& = & \mathbb{P}(X_2 = 1 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 3 \cap X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + 0 = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}(S_2 = 0) & = & \mathbb{P}(S_0 = 2 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(S_0 = 2 \cap X_1 = -1) \\
& = & \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0 \cap X_1 = -1) \\
& = & \mathbb{P}(X_2 = -1 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1 \cap X_1 = -1) \\
& = & \mathbb{P}(X_2 = -1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(S_2 = -2) & = & \mathbb{P}(S_2 = -2 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(S_2 = -2 \cap X_1 = -1) \\
& = & \mathbb{P}(X_1 + X_2 = -2 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 + X_2 = -2 \cap X_1 = -1) \\
& = & \mathbb{P}(X_2 = -3 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = -1 \cap X_1 = -1) = 0 + \mathbb{P}(X_2 = -1)\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{4}
\end{array}$$
4. Comme on l'a démonté à la question précédente $\mathbb{P}(S_2 = 2 \cap X_1 = -1) = 0$, or $\mathbb{P}(S_2 = 2)\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Ainsi, les variables aléatoires S_2 et X_1 ne sont pas indépendantes.
5. $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, ainsi, $-X_1(\Omega) = \{1, -1\}$, De plus, $\mathbb{P}(-X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(-X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, ainsi, $-X_1$ a bien la même loi que X_1. Soit $\omega \in \Omega$, alors si $X_1(\omega) = 1$, alors $(-X_1)(\omega) = -1$ et si $X_1(\omega) = -1$, alors $(-X_1)(\omega) = 1$, ainsi, X_1 et $-X_1$ sont des variables aléatoires différentes.
6. En appliquant la formule d'addition du cosinus, puis la linéarité de l'espérance, il vient,
$$\mathbb{E}(\cos(S + T)) = \mathbb{E}(\cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T)) = \mathbb{E}(\cos(S)\cos(T)) - \mathbb{E}(\sin(S))E(\cos(T))$$
Comme S et T sont indépendantes, par propriétés des variables aléatoires images, $\cos(S)$ et $\cos(T)$ sont indépendantes, de même, $\sin(S)$ et $\sin(T)$ sont indépendantes. Or l'espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit des espérances. Il vient
$$\mathbb{E}(\cos(S + T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\mathbb{E}(\cos(T)) - \mathbb{E}(\sin(S))\mathbb{E}(\sin(T))$$
Appliquons la formule de transfert pour calculer $\mathbb{E}(\sin(T))$:
$$\mathbb{E}(\sin(T)) = \sum_{t \in T(\Omega)} \sin(t)\mathbb{P}(T = t) = \sum_{\substack{t \in T(\Omega) \\ t<0}} \sin(t)\mathbb{P}(T = t) + \sin(0)\mathbb{P}(T = 0) + \sum_{\substack{t \in T(\Omega) \\ t>0}} \sin(t)\mathbb{P}(T = t)$$

Remarquons que $t \mapsto -t$ induit une bijection de $T(\Omega) \cap \mathbb{R}_-^*$ vers $T(\Omega) \cap \mathbb{R}_+^*$ (car T et $-T$ ont la même loi), ainsi par changement d'indice $u = -t$ dans la première somme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sin(T)) &= \sum_{\substack{u \in T(\Omega)\\u>0}} \sin(-u)\mathbb{P}(T=-u) + 0 + \sum_{\substack{t \in T(\Omega)\\t>0}} \sin(t)\mathbb{P}(T=t)\\ &= \sum_{\substack{u \in T(\Omega)\\u>0}} -\sin(u)\mathbb{P}(T=u) + \sum_{\substack{t \in T(\Omega)\\t>0}} \sin(t)\mathbb{P}(T=t) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(\cos(S+T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\mathbb{E}(\cos(T))$

7. Procédons par récurrence, avec la propriété $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\cos(tS_n)) = \cos^n(t)$».
   - Pour $n = 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après la formule de transfert,

   $$\mathbb{E}(\cos(tS_1)) = \mathbb{E}(\cos(tX_1)) = \cos(t1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \cos(t \times -1) = \cos(t)\frac{1}{2} + \cos(-t)\frac{1}{2} = \cos(t)$$

   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $t \in \mathbb{R}$ D'après le lemme des coalitions tS_n et tX_{n+1} sont indépendantes. De plus, tX_{n+1} et $-tX_{n+1}$ ont la même loi (elles prennent les valeurs t et $-t$ avce probabilité $\frac{1}{2}$ chacune si $t \neq 0$ et sont égale si $t = 0$), ainsi, d'après la question 6 ,

   $$\mathbb{E}(\cos(tS_{n+1})) = \mathbb{E}(\cos(tS_n + tX_{n+1})) = \mathbb{E}(\cos(tS_n)\mathbb{E}(tX_{n+1}) = \cos^n(t)\cos(t) = \cos^{n+1}(t)$$

   Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
8. On remarque que S_{2p+1} est une somme de nombres impairs et qu'il y a un nombres impairs dans la somme, ainsi S_{2p+1} est impair. Donc $(S_{2p+1} = 0)$ est un évènement impossible. Donc $\mathbb{P}(S_{2p+1}) = 0$. Pour que l'évènement $(S_{2p} = 0)$ se réalise, il faut et suffit qu'il y ait autant de termes égaux à 1 dans la somme que de termes égaux à -1. Il faut donc p termes égale à 1 et p termes égale à -1. Il y a $\binom{2p}{p}$ façons de choisir lesquels des X_k vaut 1, une fois ce choix fait, les autres X_k vaille -1. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_{2p}) \in \{-1, 1\}^{2p}$, par indépendance

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{2p}(X_k = x_k)) = \prod_{k=1}^{2p}\mathbb{P}(X_k = x_k) = \frac{1}{2^{2p}}$$

. Ainsi, $\mathbb{P}(S_{2p} = 0) = \dfrac{\binom{2p}{p}}{4^p}$

Les intégrales de Bruce Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Donner une primitive de cos ainsi que la dérivée de $t \mapsto \cos^{n+1}(t)$.
2. En intégrant par parties $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)\,\mathrm{d}t$, démontrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Posons $t = \arcsin(u)$, comme $u \in [0;1]$, $\sin(t) = \sin(\arcsin(u)) = u$, de sorte que $\cos(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, Ainsi, par changement de variable,

$$I_n = \int_0^1 (1-\sin^2(t))^n\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(t)^{2n}\cos(t)\,\mathrm{d}t = W_{2n+1}$$

5. Posons $u\colon t \mapsto t$ et $v\colon t \mapsto -\dfrac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}$, alors $(u,v) \in \mathscr{C}^1([0;\pi/2],\mathbb{R})^2$, $u'\colon t \mapsto 1$ et $v'\colon t \mapsto \sin(t)\cos^n(t)$. Ainsi, par intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \left[t \times -\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \times \left(-\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{W_{n+1}}{n+1}$$

Je n'ai pas de titre drôle, mais vos réponses absurdes feront l'affaire

1. $f(x) = \dfrac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathcal{o}(x^3)}{1+x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{o}(x^3)}$. On pose $u = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{o}(x^3)$, alors $u^2 = x^2 + \mathcal{o}(x^3)$, $u^3 = x^3 + \mathcal{o}(x^3)$, comme $u^3 \sim x^3$, $\mathcal{o}(u^3) = \mathcal{o}(x^3)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathcal{o}(x^3))\frac{1}{1+u} \\ &= (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathcal{o}(x^3))(1-u+u^2-u^3+\mathcal{o}(u^3)) \\ &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathcal{o}(x^3)\right)\left(1-(x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{o}(x^3))+x^2+\mathcal{o}(x^3)-x^3+\mathcal{o}(x^3)\right) \\ &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathcal{o}(x^3)\right)\left(1-x+x^2-\frac{5x^3}{6}+\mathcal{o}(x^3)\right) \\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\mathcal{o}(x^3) \end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto 1+\sin(x)$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est aussi de classe $\mathscr{C}^3$. Par quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^3$ dont le dénominateur ne s'annule pas, f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$. Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{6} + \mathcal{o}(x^3)$$

Par unicité d'un développement limité, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$ et $f^{(3)}(0) = -1$.

Un exercice où vous allez prendre votre pied !

1. Il y a dix chaussures à aligner, il s'agit donc de dénombrer les permutations à 10 éléments, soit 10!
2. Il s'agit de prendre deux éléments dans un ensemble à dix éléments soit $\binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2} = 45$ possibilités.
3. Pour la chaussure gauche il y a cinq possibilités et cinq possibilités pour la chaussure droite, soit $5 \times 5 = 25$ possibilités.
4. Il y a cinq possibilités de choisir la chaussure gauche. Mais une fois la chaussure gauche choisie il ne reste que quatre possibilités pour la chaussure droite. Soit $5 \times 4 = 20$ possibilités.
5. Soit la chaussure gauche est rouge et celle de droite est verte ce qui fait $3 \times 2 = 6$ possibilités, soit la chaussure gauche est verte et celle de droite rouge ce qui fait $2 \times 3 = 6$ possibilités. En sommant sur ces deux cas disjoints, cela fait 12 possibilités.