Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

1. Posons $f\colon t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$, cette fonction est définie et continue sur $]\,0\,;1\,[$ (comme inverse d'une fonction continue et qui ne s'annule pas sur $]\,0\,;1\,[$. Soit $x \in\,]\,0\,;1\,[$, alors comme f est continue sur $\left[\,x^2\,;x\,\right]$, $\varphi(x)$ est bien définie.
2. Soit $x \in\,]\,0\,;1\,[$, remarquons alors que $x^2 \leqslant x$. Par croissance de la fonction logarithme sur $\left[\,x^2\,;x\,\right]$, il vient
$$\forall t \in \left[\,x^2\,;x\,\right] \qquad \ln(x^2) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(x) < 0$$
Par passage à l'inverse (décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$), il s'ensuit
$$\forall t \in \left[\,x^2\,;x\,\right] \qquad \frac{1}{\ln(x)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{1}{\ln(x^2)}$$
Ainsi, en intégrant sur $\left[\,x^2\,;x\,\right]$, on a par croissance de l'intégrale (avec $x^2 < x$)
$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x^2)}\,\mathrm{d}t$$
Ainsi, $\dfrac{x-x^2}{\ln(x)} \leqslant -\varphi(x) \leqslant \dfrac{x-x^2}{\ln(x^2)}$. Ainsi, $\dfrac{x^2-x}{2\ln(x)} \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{x^2-x}{\ln(x)}$ Or $x^2 - x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0^-$ et $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, par quotient, $\dfrac{x^2-x}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, de même $\dfrac{x^2-x}{2\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, par théorème d'encadrement, $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, φ se prolonge en 0.
3. Comme f est continue sur $]\,0\,;1\,[$, il existe F une primitive de f sur $]\,0\,;1\,[$, ainsi pour tout $x \in\,]\,0\,;1\,[$, $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$, or F et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $]\,0\,;1\,[$, par composition et soustractions de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$ et
$$\forall x \in\,]\,0\,;1\,[\qquad \varphi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Correction de l'exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x\,[\,0\,;1\,]$, $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$. Comme la fonction inverse es décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $1/2 \leqslant 1/(1+x) \leqslant 1$. En multipliant par x^n (qui est positif donc ne change pas le sens des inégalités), $\dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$. Par croissance de l'intégrale,
$$\int_0^1 x^n/2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
En calculant l'intégrale de droite et celle de gauche il vient :
$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$
Or, $1/(n+1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $2/2(n+1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème d'encadrement, on $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Correction de l'exercice 7.

1. Si f est positive, alors $|f| = f$ et donc f et $|f|$ ont la même intégrale. Réciproquement, supposons $\displaystyle\int_a^b |f| = \int_a^b f$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b |f| - f = 0$. Or, comme $f \leqslant |f|$, $|f| - f \geqslant 0$. Ainsi, $|f| - f$ est une fonction positive, continue (par composée avec la valeur absolue qui est une fonction continue[1] et par différence) et d'intégrale nulle. D'après le théorème de nullité de l'intégrale, on en déduit que $|f| - f = 0$ soit $f = |f|$. Par conséquent, f est une fonction continue.

1. Car 1-lipschitzienne

2. Proposons deux méthodes :
   - Comme f et $|f|$ sont continues sur $[\,a\,;b\,]$, leur intégrale est la limite des sommes de Riemann. Or, par inégalité triangulaire sur une somme :

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b |f|$$

   De plus, comme $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$ et que le module est continue, par caractérisation séquentielle de la limite, $\displaystyle\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|\int_a^b f\right|$. Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, on en déduit que $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
   - $\displaystyle\int_a^b f$ est un complexe. Posons $\rho = \displaystyle\left|\int_a^b f\right|$ son module et θ un argument de ce complexe (si ce complexe est nul, prenons $\theta = 0$). Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f = \rho e^{i\theta}$. Par conséquent, $\displaystyle\int_a^b e^{-i\theta} f = \rho$. Ainsi, par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes :

$$\rho = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(e^{-i\theta} f) \in \mathbb{R}$$

   Par identification des parties réelles et imaginaires d'un complexe, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(e^{-i\theta} f) = 0$ et $\rho = \displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f)$. Rappelons que $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, ainsi $\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) \leqslant |e^{-i\theta} f| = |f|$. Par croissance de l'intégrale, il vient $\rho = \displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) \leqslant \int_a^b |f|$ Et comme $\rho = \displaystyle\left|\int_a^b f\right|$, on en déduit que $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

3. En reprenant les notations introduites dans la question précédente. Supposons $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$. Alors, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b |f| - \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) = 0$. Subséquemment, $|f| - \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f)$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle, ainsi d'après le théorème de nullité de l'intégrale, $|f| - \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) = 0$. Donc $|e^{-i\theta} f| = \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f)$ D'où $e^{-i\theta} f = |e^{-i\theta} f|$. Ainsi, $f = e^{i\theta}|f|$. Ainsi, si $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$, alors il existe θ tel que $f = e^{i\theta}|f|$. Autrement, dit la fonction f prend ses valeurs sur une demi-droite partant de 0.
   Réciproquement, s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta}|f|$, alors

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b e^{i\theta}|f|\right| = \left|e^{i\theta}\int_a^b |f|\right| = \left|e^{i\theta}\right| \times \left|\int_a^b |f|\right| = 1 \times \int_a^b |f|$$

   En conclusion, $\displaystyle\int_a^b |f| = \left|\int_a^b\right|$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta}|f|$.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. 1. $X^{2n}-1$ est un polynôme de degré $2n$ qui admet $2n$ racines distinctes qui sont les racines $2n$-ième de l'unité. Ces racines sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{2n}}$ pour[2] $k \in [\![0\,;2n-1]\!]$. Comme $X^{2n}-1$ est unitaire, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
X^{2n}-1 &= \prod_{k=0}^{2n-1}\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)\prod_{k=n}^{2n-1}\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right) \underset{j=2n-k}{=} \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)\prod_{j=1}^{n}\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n-j)\pi}{n}}\right)\\
&= \underbrace{(X-1)}_{k=0}\underbrace{(X+1)}_{j=n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\left(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)\right)\\
&= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)
\end{aligned}$$

On remarque que $X-1$ et $X+1$ sont des polynômes irréductibles (car de degré 1) et pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1$ est un polynôme réel de degré 2 dont les racines sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}$ donc complexes non réelles, ainsi ce polynôme est irréductible. Ainsi, on a bien la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n}-1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $t \in [\,0\,;\pi\,]$:
   - Si $t=0$, alors $a^2-2a\cos(t)+1=(a-1)^2>0$ (car $a\neq 1$)
   - Si $t=\pi$, alors $a^2-2a\cos(t)+1=(a+1)^2>0$ (car $a\neq -1$)
   - Si $t\in\,]\,0\,;\pi\,[$, $X^2-2X\cos(t)+1=(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})$, ainsi le polynôme $X^2-2X\cos(t)+1$ est un polynôme de degré 2 n'ayant pas de racines réelles donc garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, comme le coefficient devant le X^2 est positif, on en déduit que la fonction polynomiale associée ne prend que des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ en particulier, $a^2-2a\cos(t)+1>0$.
3. D'après ce qui précède, $t\mapsto a^2-2a\cos(t)+1$ prend des valeurs strictement positives sur $[\,0\,;\pi\,]$ et est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$, par composition avec le logarithme (fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$), $t\mapsto \ln(a^2-2a\cos(t)+1)$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$. En particulier, on peut appliquer le théorème des sommes de Riemann :

$$\int_0^\pi \ln(a^2-2a\cos(t)+1) = \lim_{n\to+\infty} S_n \qquad \text{où} \qquad S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(a^2-2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$S_n = \underbrace{\frac{\pi}{n}\ln(a^2+1)}_{k=0}+\frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(a^2-2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\right) = \frac{\pi}{n}\ln(a^2+1)+\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{(a-1)(a+1)}\right)$$

   - Si $|a|<1$, alors $a^{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ et

$$\frac{a^{2n}-1}{(a-1)(a+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{(1-a)(a+1)}>0$$

   Par continuité du logarithme,

$$\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{(a-1)(a+1)}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln\left(\frac{1}{(1-a)(a+1)}\right)$$

   Par produit et par somme, $S_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.
   - Si $|a|>1$, alors :

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln(a^2+1)-\frac{\pi}{n}\ln(a^2-1)+\frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}-1)$$

2. On pourrait gagner du temps en affirmant que l'on peut prendre $k\in[\![-n+1\,;n]\!]$ car c'est plus symétrique par rapport à 0.

Or, $\ln(a^{2n}-1)=\ln(|a|^{2n}-1)=\ln(|a|^{2n}(1-|a|^{-2n}))=2n\ln(|a|)+\ln(1-|a|^{-2n})$. Ainsi,

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln(a^2+1)-\frac{\pi}{n}\ln(a^2-1)+2\pi\ln(|a|)+\frac{\pi}{n}\ln(1-|a|^{-2n})$$

Par produit et par somme $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\pi\ln(|a|)$. Ainsi :

$$\int_0^{\pi}\ln(a^2-2a\cos(t)+1)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & \text{si} \quad |a|<1\\ 2\pi\ln(|a|) & \text{si} \quad |a|>1\end{cases}$$

Correction de l'exercice 13. 1. Comme g est continue sur $[\,0\,;1\,]$, d'après le théorème des sommes de Riemann, $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}g(k/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Or, pour tout $k\in[\![\,0\,;n-1\,]\!]$, $a\leqslant g(k/n)\leqslant b$. Par somme d'inégalités, on obtient $na\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n-1}g(k/n)\leqslant nb$. En divisant par n,

$$a\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(k/n)\leqslant b$$

Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, $a\leqslant\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant b$. Par conséquent, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\in[\,a\,;b\,]$.

2. Posons, pour tout $k\in[\![\,0\,;n-1\,]\!]$, $\lambda_k=1/n$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k=1$. Ainsi, comme φ est convexe en utilisant le résultat de l'exercice 30 du TD11, on obtient :

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k g(k/n)\right)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k(\varphi\circ g)(k/n) \tag{1}$$

Par composée de fonctions continues, $\varphi\circ g$ est continue, ainsi, d'après le théorème des sommes de Riemann

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k(\varphi\circ g)(k/n)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi\circ g)(k/n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1\varphi(g(x))\,\mathrm{d}x$$

De plus, d'après ce même théorème :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k g(k/n)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(k/n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

Or φ est continue sur $[\,a\,;b\,]$ donc en $\int_0^1 g$, donc par caractérisation séquentielle de la limite

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n-1}g(k/n)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\varphi\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

On utilise alors l'inégalité (1) et on passe à la la limite (les inégalités larges sont conservées par passage à la limite), ainsi

$$\varphi\left(\int_0^1 g\right)\leqslant\int_0^1\varphi\circ g$$

Correction de l'exercice 14. 1. Pour tout $t>-1$,

- $f'(t)=\dfrac{1}{1+t}$,

- $f''(t) = \dfrac{-1}{(1+t)^2}$
- $f'''(t) = 2(1+t)(1+t)^4 = \dfrac{2}{(1+t)^3}$
- $f^{(4)}(t) = \dfrac{-6(1+t)^2}{(1+t)^6} = \dfrac{-6}{(1+t)^4}$.

On pose ainsi l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(k)$: « $f^{(k)} \colon t \mapsto \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, alors on peut dériver $f^{(k)}$ par la formule de l'inverse d'une fonction dérivable, ainsi

$$f^{(k)} \colon t \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)! \times k(1+t)^{k-1}}{(1+t)^{2k}} = \frac{(-1)^k k!}{(1+t)^{k+1}}$$

Dès lors, $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. Par récurrence, on a prouvé que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} \colon t \mapsto \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [\,0\,;1\,]$, alors $|f^{(k)}(t)| = \dfrac{(k-1)!}{(1+t)^k} \leqslant \dfrac{(k-1)!}{1} = |f^{(k)}(0)|$. Ainsi, la valeur maximum de $f^{(k)}$ sur $[\,0\,;1\,]$ est atteint en 0 et vaut $(k-1)!$.
3. Appliquons la formule de Taylor à $a = 0$ et $x = 1$, on obtient :

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \ln(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi,

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times n!\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, cela montre que[3] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

Correction de l'exercice 15. Notons $f \colon x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $b = 1$ et $a = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, remarquons que $f \in \mathscr{C}^{n+1}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, appliquons donc la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

On a donc

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Majorons la valeur absolue de $\mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$:

$$\left|\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^1\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^1 \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ce qui prouve que $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite convergente et qu'elle converge vers e.

3. Dans le chapitre sur les séries, on notera $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Correction de l'exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, appliquons la formule d'intégration par parties à f et $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}$ qui sont bien des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,]$ on a donc :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}\,\mathrm{d}t$$

On remarque que $\left|f(b)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nb}}{\mathrm{i}n}\right| = \dfrac{|f(b)|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $f(b)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nb}}{\mathrm{i}n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, de même $f(a)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}na}}{\mathrm{i}n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. De plus,

$$\left|\int_a^b f'(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc, par somme de termes tendant vers 0, on a montré que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18. La fonction g est continue sur $[\,a\,;b\,]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe $(\alpha,\beta) \in [\,a\,;b\,]^2$ tel que pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $g(\alpha) \leqslant g(x) \leqslant g(\beta)$. Pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f(x) \geqslant 0$, ainsi $f(x)g(\alpha) \leqslant f(x)g(x) \leqslant g(\beta)f(x)$, par croissance de l'intégrale, on a donc :

$$g(\alpha)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(\alpha)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(\beta)f(x)\,\mathrm{d}x = g(\beta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme f est positive, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Distinguons les cas :

- Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$, alors
$$g(\alpha) \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant g(\beta)$$
Comme g est continue sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$ (ou $[\,\beta\,;\alpha\,]$ si $\beta < \alpha$), on peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires :
$$\exists c \in [\,\alpha\,;\beta\,] \qquad g(c) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$
Ainsi, pour un tel $c \in [\,a\,;b\,]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors comme f est positive et continue, d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale, on peut en conclure que $f = 0$, ainsi l'égalité demandée sera vraie pour tout $c \in [\,a\,;b\,]$.

Correction de l'exercice 19.

- Par linéarité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t) - t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = 0$.
- Supposons que pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$, $f(t) > t$, alors $f(t) - t > 0$ et donc par l'intégrale d'une fonction continue, positive et au moins strictement positive, on aurait $\displaystyle\int_0^1 f(t) - t\,\mathrm{d}t > 0$, ce qui n'est pas le cas, donc notre hypothèse est absurde, donc il existe $t_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $f(t_0) - t \leqslant 0$

- De même, supposons que pour tout $t \in [\,0\,;1\,]\, t > f(t)$, alors $t - f(t) > 0$ et donc par l'intégrale d'une fonction continue, positive et au moins strictement positive, on aurait $\displaystyle\int_0^1 t - f(t)\,\mathrm{d}t > 0$, ce qui n'est pas le cas, donc notre hypothèse est absurde, donc il existe $t_1 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $t_1 - f(t_1) \leqslant 0$.
- Posons donc $g\colon t \mapsto f(t)-t$, g est continue sur $[\,0\,;1\,]$, $g(t_0) \leqslant 0$ et $g(t_1) \geqslant 0$, par application du théorème des valeurs continues, il existe $t_2 \in [\,t_0\,;t_1\,]$ (ou $[\,t_1\,;t_0\,]$) tel que $g(t_2) = 0$, donc $f(t_2) - t_2 = 0$, ainsi t_2 est un point fixe de f.

Correction de l'exercice 20. 1. Notons $g\colon t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t}$ cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ (comme quotient de fonctions continues et **dont le dénominateur ne s'annule pas sur** $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$). Or d'après le cours, $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si g est continue sur $[\,0\,;x\,]$. Donc, pour que $f(x)$ existe, il faut et suffit que $[\,0\,;x\,] \subset \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Ceci est possible si et seulement si $x > -1$. Ainsi l'ensemble de définition de f est $]\,-1\,;+\infty\,[$.

2. Comme g est continue sur $]\,-1\,;+\infty\,[$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ y est dérivable comme primitive de g. Ainsi, par produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $]\,-1\,;+\infty\,[$. De plus, pour tout $x > -1$, on a :

$$f'(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + xg(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t + x\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$$

On remarque que g est une fonction positive sur $]\,-1\,;+\infty\,[$. Ainsi, pour $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive dont les bornes sont dans le bon sens), $x > 0$ et $g(x) \geqslant 0$, donc par produit et somme de termes positifs, $f'(x) \geqslant 0$. Donc f' est positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$, f est donc croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Si $x \in\,]\,-1\,;0\,]$, alors $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^0 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive dont les bornes sont dans le bon sens), ainsi $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$. De plus, $x < 0$ et $g(x) \geqslant 0$, donc $xg(x) \leqslant 0$, par somme de termes négatifs, $f'(x) \leqslant 0$. Donc f' est négative sur $]\,-1\,;0\,]$, f est donc décroissante sur $]\,-1\,;0\,]$.

3. Soit $x \in\,]\,-1\,;0\,[$, alors $f(x) = -x\displaystyle\int_x^0 g(t)\,\mathrm{d}t$. Remarquons que pour tout $t \in [\,x\,;0\,]$, $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1+t}$, par croissance de l'intégrale sur $[\,x\,;0\,]$, on a

$$\int_x^0 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^0 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-1}\ln(1+x)$$

Multiplions cette inégalité par $-x$ (le sens de l'inégalité sera conservé car $-x > 0$), on obtient $f(x) \geqslant \mathrm{e}^{-1}x\ln(1+x)$. Or $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} x\ln(1+x) = +\infty$. Donc par minoration, on a $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.

Correction de l'exercice 21. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $F\colon y \mapsto \displaystyle\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Comme $f\colon t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ est continue, le théorème fondamental de l'analyse stipule que F est une primitive de f, ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f > 0$. Ceci prouve que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$, remarquons aussi que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{t^2} \geqslant 1$, donc par croissance de l'intégrale $F(y) \geqslant \displaystyle\int_0^y 1\,\mathrm{d}t$ si $y \geqslant 0$ et $F(y) \leqslant \displaystyle\int_0^y 1\,\mathrm{d}t$ si[4] $y < 0$. Ceci prouve par majoration/minoration que $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} F(y) = +\infty$ tandis que $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} F(y) = -\infty$. Ainsi, F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche donc à montrer que l'équation d'inconnue $y \in \mathbb{R}$

$$F(y) - F(x) = 1$$

4. Attention à ce cas-là, les bornes ne sont pas dans le bon sens, ainsi écrire, au besoin, $F(y) = -\displaystyle\int_y^0 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant -\int_y^0 \mathrm{d}t = \int_0^y \mathrm{d}t$.

a une unique solution, or $F(y) - F(x) = 1$ si et seulement si $y = F^{-1}(1 + F(x))$. Dès lors $a(x)$ existe, est unique et vaut $F^{-1}(1 + F(x))$.

2. Comme $F' = f$ ne s'annule pas et que F est de classe $\mathscr{C}^1$, d'après le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque, F^{-1} est aussi $\mathscr{C}^1$, ainsi $a\colon x \mapsto a(x) = F^{-1}(1 + F(x))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que $\displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{x+1} \mathrm{d}t$, ainsi, $F(x+1) - F(x) \geqslant 1$, donc
$$F(x+1) \geqslant F(x) + 1 \geqslant F(x)$$
Comme F est continue, le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $y \in [\,x\,;x+1\,]$ tel que $F(y) = F(x) + 1$, par unicité de $a(x)$, on a alors $y = a(x) \in [\,x\,;x+1\,]$, soit $x \leqslant a(x) \leqslant x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$, par théorème d'encadrement $a(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.

Correction de l'exercice 22. 1. Posons $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, alors $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Ainsi, $W_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^n (-\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$.

2. Commençons par linéariser les puissances de cosinus, soit $t \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}
\cos^2(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2t} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t}}{4} = \frac{2\cos(2t) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2t)}{2} \\
\cos^3(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3t} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,3t}}{8} \\
&= \frac{2\cos(3t) + 6\cos(t)}{8} = \frac{\cos(3t) + 3\cos(t)}{4}
\end{aligned}$$

- $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$
- $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
- $W_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$
- $W_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3t) + 3\cos(t)}{4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(3t)}{12} + \frac{3\sin(t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [\,0\,;\pi/2\,]$, alors comme $\cos(t) \in [\,0\,;1\,]$, $\cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$, par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leqslant W_n$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme, pour tout $t \in [\,0\,;\pi/2\,]$, $\cos^n(t) \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$. Ainsi, $(W_n)_n$ est une suite décroissante et minorée (par 0 par exemple). Par conséquent, d'après le théorème de la limite monotone, $(W_n)_n$ est une suite convergente.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $f\colon t \mapsto \cos^n(t)$ est continue et positive sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, de plus $f(0) = 1 > 0$, d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale, $W_n > 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour calculer W_{n+2}, intégrons par parties, posons $u = \sin$ et $v = \cos^{n+1}$, u et v sont de classe

$\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ [5] et $u' = \cos$ et $v' = -(n+1)\sin\cos^n$:

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)\sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \\
W_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2}W_n
\end{aligned}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors d'après la question précédente,

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = \left[(n+2)W_{n+2}\right]W_{n+1} = \left[(n+1)W_n\right]W_{n+1}$$

Ceci montre que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. La constante est donc $W_1W_0 = \pi/2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(W_n)_n$ est décroissante, $W_{n+1} \leqslant W_n$, en divisant par W_n qui est strictement positif, on obtient $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. De plus, $(n+1)/(n+2) = \dfrac{W_{n+2}}{W_{n+1}} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n}$. On en déduit les inégalités demandés.

9. Comme $\dfrac{n+1}{n+2} \sim \dfrac{n}{n} = 1$, on en déduit que $\dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, par théorème d'encadrement, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ainsi, $W_{n+1} \sim W_n$.

10. On sait que $(n+1)W_{n+1}W_n \sim \pi/2$, en divisant par $n+1$, on obtient : $W_nW_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2(n+1)} \sim \dfrac{\pi}{2n}$. De surcroît, $W_{n+1} \sim W_n$, on obtient $W_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ d'où

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Comme $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et que deux suites équivalentes ont même limite, on en déduit que $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

11. Pour les termes pairs il y a deux méthodes : une récurrence qui suppose que l'on connaisse la formule à montrer, ainsi qu'une méthode avec des ... qui permet de trouver la formule. De même pour les termes impairs :
   - Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(p)$:«$W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$». Pour $p = 0$, $\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} = W_0 = W_{2\times 0}$ et Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vérifiée, alors, en utilisant la question 6, on obtient

   $$W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2(p+1)2(p+1)2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$$

   Ainsi, $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   - On montre la formule $W_{2p+1} = \dfrac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}$ par une récurrence similaire.
   - Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors en utilisant la question 6, avec $n = 2p-2$, on obtient

   $$W_{2p} = W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n = \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2}$$

5. Il est conseillé de préciser qui sont u et v et qu'elles sont de classe $\mathscr{C}^1$.

En utilisant la question 6 avec $n = 2p-4$, on obtient $W_{2p-2} = W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n = \dfrac{2p-3}{2p-2} W_{2p-4}$. Ainsi,

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times W_{2p-4}$$

En continuant ainsi, de proche en proche, on obtient :

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-5}{2p-4} \times \ldots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times W_0$$

Ainsi,

$$W_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1)}{\prod_{k=1}^{p} (2k)} W_0 = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1) \prod_{k=1}^{p} (2k)}{\left(\prod_{k=1}^{p} (2k) \right)^2} W_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} W_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

- $$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} W_{2p-3} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times W_1$$

  Donc

$$W_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^{p} (2k)}{\prod_{k=1}^{p} (2k+1)} W_1 = \frac{\left(\prod_{k=1}^{p} (2k) \right)^2}{\prod_{k=1}^{p} (2k+1) \prod_{k=1}^{p} (2k)} W_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

12. Ainsi, $p! \sim C\sqrt{p} \left(\dfrac{p}{e} \right)^p$, et $(2p)! \sim C\sqrt{2p} \left(\dfrac{2p}{e} \right)^{2p}$, on trouve par quotient d'équivalents que

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{C\sqrt{2p} \left(\frac{2p}{e} \right)^{2p}}{2^{2p} \left(C\sqrt{p} \left(\frac{p}{e} \right)^p \right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{C\sqrt{2p}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

Ainsi, par division, $\dfrac{\pi\sqrt{4p}}{C\sqrt{2p}\sqrt{\pi}} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{C} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$ Comme $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{C}$ est une constante qui tend vers 1, on a que $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{C} = 1$, soit $C = \sqrt{2\pi}$. Par conséquent, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\dfrac{n}{e} \right)^n$.