Chapitre 21
Séries numériques

Prérequis :
- Sommes
- Suites
- Développements limités
- Intégration (en particulier la formule de Taylor avec reste intégrale)

Objectifs :
- Donner un sens à une «somme infinie» lorsque c'est possible.
- Déterminer si c'est possible.
- Le cas échéant, calculer cette somme si c'est possible.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté
Ce polycopié contient une animation, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1 Généralités sur les séries

Définition d'une série

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le terme S_n est la **somme partielle** d'indice n de cette série. On note $\sum u_n = (S_n)_n$ la série de terme général u_n.

Remarque 1. $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$ etc.

Définition de la convergence ou de la divergence d'une série et somme

On dit $\sum u_n$ **converge** (respectivement diverge) lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (respectivement diverge).
Si la série $\sum u_n$ converge, on appelle **somme (infinie)** de la série $\sum u_n$ la limite de $(S_n)_n$, notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définition du reste d'une série convergente

Si $\sum u_n$ converge, soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, R_n est appelé le **reste** d'ordre n de la série.

Exemple des séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à la série géométrique $\sum q^n$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ si $q \neq 1$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q = 1$, $S_n = n+1$
- si $|q| < 1$, alors $\sum q^n$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$
- si $|q| \geqslant 1$, alors $\sum q^n$ diverge.

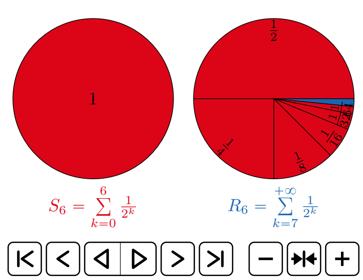


Figure 1 – Les séries géométriques (avec $q = 1/2$) : piece of cake

Péril imminent : la série géométrique de raison 1

On s'assure que $q \neq 1$ **avant** d'écrire $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ou $\dfrac{1}{1-q}$, sous peine d'avoir des problèmes judiciaires.

Attention à ne pas confondre série, somme partielle et somme

La suite $(u_n)_n$ et le nombre u_n ne doivent pas être confondus. De même, la série $\sum u_n$, le réel $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (qui n'existe qu'après avoir montré que la série converge) ne doivent pas être confondus.

Remarques 2.

- Soit $\sum u_n$ une série convergente, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite définie à partir de n_0, on définit de même $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$, par $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant n_0}$, et en cas de convergence, on note $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple 1. Si $q \in \mathbb{C}$, alors $\sum_{n\geqslant n_0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \dfrac{q^{n_0}}{1-q}$.

Exemple de série divergente : la série harmonique

La série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n$, appelée **série harmonique**, diverge, alors que $1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Proposition n° 1 : condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Remarque 3. Par contraposée, si $u_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge, on dit que $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Démonstration de la proposition n° 1 : Supposons que $\sum u_n$ converge, alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Or $(S_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est une suite extraite de $(S_n)_n$ donc converge aussi vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Ainsi, en faisant la différence des deux suites, $S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$, ainsi $(u_n)_n$ est nécessairement une suite qui tend vers 0. ■

Exemples 2. Si $|q| \geqslant 1$, alors $\sum q^n$ diverge grossièrement tout comme $\sum n$, $\sum \dfrac{n+\cos(n)}{n}$, $\sum (-1)^n$.

Péril imminent la réciproque est fausse

Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, cela ne prouve pas que $\sum u_n$ converge (cf. $\sum 1/n$).

Proposition n° 2 : espace vectoriel des séries convergentes et linéarité de la somme

Soient des séries convergentes $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum \lambda u_n + v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

La somme est une forme linéaire de l'espace vectoriel des séries convergentes.
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors la série $\sum z_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ convergent, et alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

Démonstration de la proposition n° 2 : Supposons que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k + v_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Ceci prouve que $\sum \lambda u_k + v_k$ est une série convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, en se souvenant qu'une suite à valeurs complexes converge si et seulement si sa suite des parties réelles et sa suite des parties imaginaires convergent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum z_k \text{ converge} &\iff \exists \ell \in \mathbb{C} \quad \sum_{k=0}^{n} z_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\
&\iff \exists \ell \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{Im}(\ell) \\
&\iff \exists \ell \in \mathbb{C} \quad \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}(z_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Im}(z_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{Im}(\ell) \\
&\iff \sum \operatorname{Re}(z_n) \quad \text{et} \quad \sum \operatorname{Im}(z_n) \text{ sont des séries convergentes}
\end{aligned}$$

De plus, on a montré qu'en cas de convergence, si $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, alors $\operatorname{Re}(\ell) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ et $\operatorname{Im}(\ell) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(z_n)$. Ce qui montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \ell = \operatorname{Re}(\ell) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(\ell) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(z_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(z_n)$$ ■

Remarque 4. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge.
Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, alors on ne peut rien dire de $\sum u_n + v_n$.

Proposition n° 3 : convergence de la série télescopique
La suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Exemple 3. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et sa somme vaut 1.

Exemple : l'exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z$.

2 Séries à termes positifs

Remarque 5. Les résultats de cette partie si $(u_n)_n$ est à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

2.1 Critère de convergence des séries positives

Proposition n° 4 : convergence des séries à termes positives et majorées
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
2. Si $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
3. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On note alors, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$.

Démonstration de la proposition n° 4 :

- Notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'indice n. Alors, on a déjà calculé que $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$, ainsi la suite $(S_n)_n$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, $(S_n)_n$ converge si et seulement si $(S_n)_n$ est majorée. Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_n$ est majorée.
- Si $\sum u_n$ converge, alors $(S_n)_n$ est majorée, notons S sa limite, alors d'après le théorème de la convergence monotone, $S_n \leqslant S$.
- $(S_n)_n$ est croissante donc soit elle converge vers une limite finie soit vers plus l'infini. Donc si $\sum u_n$ diverge, nécessairement $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. ■

2.2 Comparaison série-intégrale

Proposition n° 5 : comparaison série-intégrale

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f\colon [\, n_0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction **continue**, **décroissante** et **positive**. Alors :

La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant n_0}$ converge.

Démonstration de la proposition n° 5 : Supposons que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge. Soit un entier $n \geqslant n_0$. Fixons $k \in [\![\, n_0\,;n\,]\!]$. Comme f est décroissante sur $[\, n_0\,;+\infty\,[$, pour tout $t \in [\, k\,;k+1\,]$, $f(t) \leqslant f(k)$, par croissance de l'intégrale, il vient, $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k}^{k+1} f(n)\,\mathrm{d}t$, en sommant cette inégalité, pour $k \in [\![\, n_0\,;n-1\,]\!]$, il vient par Chasles

$$\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k) \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k)$$

Ceci montre que $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant n_0}$ est majorée. De plus, cette suite est croissante, en effet, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (par positivité de f et par positivité de l'intégrale). Donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant n_0}$ converge.

Réciproquement, supposons que la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant n_0}$ converge. Soit $k \geqslant n_0 + 1$, par décroissance de f sur $[\, k-1\,;k\,]$, pour tout $t \in [\, k-1\,;k\,]$, $f(k) \leqslant f(t)$, par croissance de l'intégrale, il vient $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$, dès lors $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$. En sommant cette relation, pour $k \in [\![\, n_0+1\,;n\,]\!]$, il vient $\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$, or la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant n_0}$ étant croissante et convergente, on sait d'après le théorème de la limite monotone, que cette suite est majorée par sa limite notée ℓ, ainsi, pour tout entier $n \geqslant n_0$, il vient

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ell$$

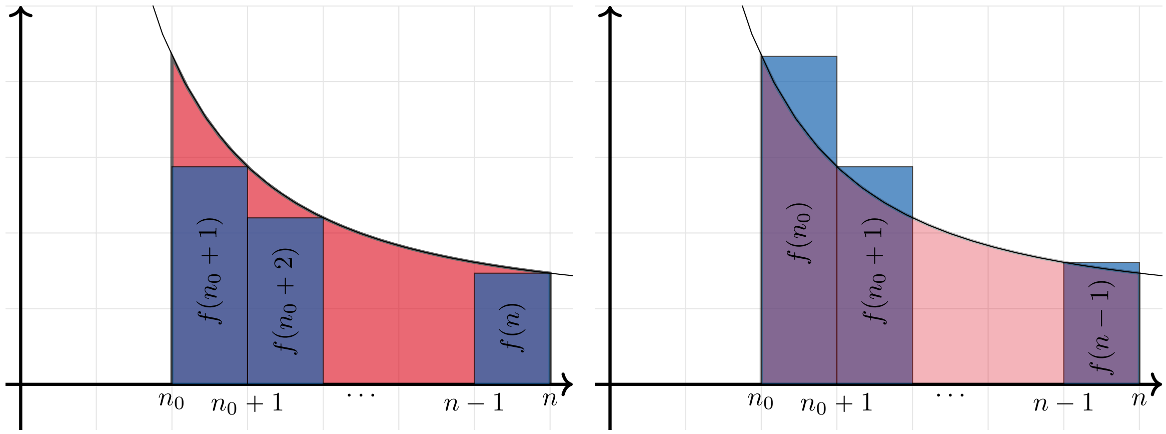
Prouvant que la suite $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} f(k)\right)_{n\geqslant n_0}$ est majorée par $\ell + f(n_0)$. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ est une série à termes positifs convergente (voir proposition 4). ■

Définition des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle **série de Riemann** de paramètre α, la série $\sum 1/n^{\alpha}$.

Proposition n° 6 : comparaison série-intégrale appliquée à l'étude des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum 1/n^{\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.



(a) $\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$

FIGURE 2 – Comparaison série-intégrale : la somme partielle est interprétée comme la somme des aires de rectangles de largeur 1 et de longueur $f(k)$, ainsi, on peut la comparer à l'intégrale de la fonction f.

Exemple 4. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (dur à montrer).

Déterminer des équivalents de somme partielle ou de reste avec des comparaison série-intégrale

1. $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
2. Si $\alpha \in]0;1[$, trouver un équivalent de la somme partielle d'ordre n : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
3. Si $\alpha > 1$, trouver un équivalent du reste d'ordre n : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

2.3 Comparaison de séries à termes positifs

Proposition n° 7 : comparaison de deux séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

1. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Démonstration de la proposition n° 7 : Supposons que $\sum v_n$ converge, alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k \in \mathbb{R}$. Ceci montre que $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_n$ est une suite majorée, en utilisant la proposition 4, cela montre que $\sum u_n$ converge. De plus, comme les inégalités larges passent à la limite, on obtient que

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$$

Le second point n'étant que la contraposée du premier. ■

Exemples 5. Étude de la nature des séries $\sum \frac{e^{\cos(n^3)}}{n^{\frac{1}{3}}}$, $\sum \frac{1}{n^2+11n+3}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n}$.

Proposition n° 8 : séries dont les termes sont équivalents

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à **termes strictement positifs** telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Attention les sommes ne sont pas équivalentes

Si $u_n \sim v_n$, en général $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \not\sim \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \neq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$ (en effet, les sommations d'équivalents sont interdites).

Exemple 6. Étude de la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n-\ln(n)}$.

3 Séries absolument convergentes

3.1 Définitions et convergence d'une série absolument convergente

Définition d'une série absolument convergente

On dit que $\sum u_n$, une série à termes réels ou complexes, **converge absolument** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Remarques 6.
- Si $\sum u_n$ converge absolument, on note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.
- Pour étudier la convergence absolue, on utilise les outils vus précédemment à la série $\sum |u_n|$.
- Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, $\sum u_n$ converge si et seulement si elle converge absolument.
- Lorsque la série $\sum u_n$ converge absolument, on dit aussi que la suite $(u_n)_n$ est sommable.

Exemple 7. La série $\sum \dfrac{\mathrm{i}^n}{n^3}$ est absolument convergente c'est-à-dire que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{i}^n}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}*}$ est sommable.

Théorème n° 1 : la convergence absolue entraîne la convergence

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge, de plus : $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Démonstration du théorème n° 1 :

- Commençons par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, supposons que $\sum u_n$ converge absolument et soit à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$, ainsi $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$. Posons $v_n = u_n + |u_n|$, par hypothèse $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum 2|u_n|$ aussi. Par comparaison de séries à termes positifs, on peut en déduit que $\sum v_n$ converge. De plus, $u_n = v_n - |u_n|$, ainsi comme $\sum v_n$ converge et $\sum |u_n|$ converge. On peut en conclure que $\sum u_n$ converge.
- Continuons avec le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, supposons que $\sum z_n$ est converge absolument et soit à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{Re}(z_n)| \leqslant |z_n|$, par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum |\mathrm{Re}(z_n)|$ converge. Ainsi, $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ est une série absolument convergente réelle donc converge en vertu du point précédent. De même, $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ converge. Ainsi, d'après la proposition 2, on en déduit que $\sum z_n$ converge.
- Soit $\sum z_n$ une série absolument convergente complexe. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire (qui est vraie dans $\mathbb{R}$ avec la valeur absolue et dans $\mathbb{C}$ avec le module), on a que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z_k|$$

Or, nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} z_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} z_k$, de plus $z \mapsto |z|$ est continue, on peut donc dire que [1]

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} z_k\right|$$

1. Rappelons que si $(x_n)_n$ est une suite convergente vers a et que f est continue en a, alors $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$.

De plus, comme $\sum |u_k|$ est une série à termes positifs, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |z_k|$$

Comme les inégalités larges passent à la limite, on obtient

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} z_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |z_k|$$ ∎

Remarque 7. La réciproque est fausse pour une série de signe quelconque.

Exemple 8. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$, alors $\sum u_n$ converge, mais ne converge pas absolument : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

3.2 Comparaison de séries

Théorème n° 2 : $\mathcal{O}$, o, $\sim$ d'une série SATP convergente
Soit $\sum p_n$ une série **à termes strictement positifs convergente** et $\sum u_n$ une série quelconque.
Si $u_n = \mathcal{O}(p_n)$ ou $u_n = o(p_n)$ ou bien $u_n \sim p_n$, alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Démonstration du théorème n° 2 : Supposons que $u_n = \mathcal{O}(p_n)$, cela veut dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{u_n}{p_n}\right| \leqslant M$, ainsi, $|u_n| \leqslant M|p_n| = Mp_n$, comme $\sum p_n$ converge, on en déduit que $\sum Mv_n$ converge, par comparaison de suites positives, $\sum |u_n|$ converge. Ainsi $\sum u_n$ converge absolument donc converge. Si $u_n = o(p_n)$ ou $u_n \sim p_n$, alors $u_n = \mathcal{O}(p_n)$. ∎

Exemples 9.
1. Étude de la nature de $\sum 1 - \cos(1/n)$
2. Étude de la nature de $\sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma \in \left]0\,;1\right[$ (constante d'Euler). $\gamma \in \mathbb{Q}$? Répondre à cette question et c'est la gloire !

Remarques 8.
- Souvent, on fera des développements limités/asymptotique, il faut pousser l'ordre de façon à avoir un terme dans le o ou le $\mathcal{O}$ qui donne une série convergente.
- Faire des DL avec des $\mathcal{O}$ permet souvent de conclure sur la convergence des séries et peut permettre de calculer un ordre en moins dans les DL, dans la pratique, on fera souvent en sorte d'obtenir un $\mathcal{O}(1/n^2)$.

Péril imminent il faut que $\sum p_n$ soit une SATP pour appliquer le théorème.
Si $\sum p_n$ n'est pas une SATP, il est possible que $\sum p_n$ converge et que $\sum u_n$ diverge avec $u_n = \mathcal{O}(p_n)$.

Exemple 10. On peut montrer que $\dfrac{1}{n\ln(n)} = o\left(\dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}\right)$ avec $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Attention à ne pas oublier la condition convergente
Si $\sum p_n$ diverge et $u_n = \mathcal{O}(p_n)$, on ne peut rien dire de $\sum u_n$.
En particulier, si $u_n = \mathcal{O}(1/n)$.

4 Cartes mentales