Correction de l'exercice 1. a) On pose $u_n = \sin(1/n) - \ln(1+1/n)$. Alors,

$$u_n = 1/n + \mathcal{O}(1/n^2) - (1/n + \mathcal{O}(1/n^2) = \mathcal{O}(1/n^2)$$

Comme $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann de paramètre 2>1). Par comparaison à une SATP, $\sum u_n$ converge.

b) En factorisant par n^2, $b_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - n\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$. On pose alors $u = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$, alors $u^2 = \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})$ et $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})$, de même, on pose $v = \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$, alors $v^2 = \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})$ et $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})$, ainsi,

$$\begin{aligned} b_n &= n\sqrt{1+u} - n\sqrt{1+v} = n\left(1+\frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \mathcal{O}(u^3)\right) - n\left(1+\frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + \mathcal{O}(v^3)\right) \\ &= \left(\frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})\right) = \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison entre séries à termes positifs, $\sum b_n$ diverge.

c) Par croissance comparée $n^2 \mathrm{e}^{-n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $\mathrm{e}^{-n^2} = o(1/n^2)$, par comparaison à une série à termes positifs et convergente $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$ converge.

d) $\frac{1}{n^{1+1/n}} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^{1/n}}$. Or $n^{1/n} = \exp(\frac{\ln(n)}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ainsi, $\frac{1}{n^{1+1/n}} \sim \frac{1}{n}$. Or $\sum 1/n$ diverge, donc par comparaison de deux SATP $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$ diverge.

e) On factorise par n^2 dans la racine, puis on utilise le développement limité $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ puis on applique la 2π-périodicité de sin :

$$\begin{aligned} e_n &= \sin(2\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \\ &= \sin\left(2\pi n(1+\frac{1}{2n^2}) + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4})\right) \\ &= \sin\left(2\pi n + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})\right) \\ &= \sin(u) \qquad \text{avec } u = \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3}) \\ &\sim u = \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3}) \\ e_n &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Or, $\sum \frac{1}{2n}$ diverge (série harmonique à un facteur non nul près), par théorème de comparaison entre deux séries à termes positifs, $\sum e_n$ diverge.

f) Faire un DL

g) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante, continue et positive sur $[\,2\,;+\infty\,[$. De plus,

$$\int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln(x))]_2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Par comparaison série-intégrale $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

h) Pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{\ln^{2025}(n)}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Or, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. Par comparaison entre deux SATP, $\sum \dfrac{\ln^{2025}(n)}{n}$ diverge.

i) Par croissance comparée, $\dfrac{n}{\ln^{2025}(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, donc $\sum \dfrac{n}{\ln^{2025}(n)}$ diverge grossièrement.

j) Par croissance comparée, $\dfrac{\ln^{2025}(n)}{n^{1.5}} = o(n^{-1.2})$, or $\sum n^{-1.2}$ converge (série de Riemann de paramètre $1.2 > 1$).

Par comparaison à une série à termes positifs et convergente, $\sum \dfrac{\ln^{2025}(n)}{n^{1.5}}$ converge.

k) Par croissance comparée, $n^{-0.6} = o(\dfrac{1}{\ln^{2025}(n)n^{1/2}})$, or $\sum n^{-0.6}$ diverge (série de Riemann de paramètre $0.6 \leqslant 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{\ln^{2025}(n)n^{1/2}}$ diverge.

l) Faisons un DL, or le seul DL de arctan que l'on connaisse est en 0. Dans ce cas, appliquons la formule[1] $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour tout $x > 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\arctan(n+2025) - \arctan(n) &= \left(\pi/2 - \arctan\left(\frac{1}{(n+2025)}\right)\right) - \left(\pi/2 - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2025}\right) \\
&= \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n+2025} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(n+2025)^3}\right) \\
&= \frac{2025}{n(n+2025)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Justifions la manipulation des $\mathcal{O}$ effectuée : $n + 2025 \sim n$, donc $(n+2025)^3 \sim n^3$, ainsi $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{(n+2025)^3}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Par comparaison à une série à termes positifs et convergente, $\sum \arctan(n+2025) - \arctan(n)$ converge.

m) Posons $u_n = \dfrac{\cos(n^4)}{n^3}$, or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$. Comme $\sum 1/n^3$ converge, par comparaison de deux SATP, $\sum |u_n|$ converge, ainsi $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

n) Par croissance comparée $n^2 \times n^{2025}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $n^{2025}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = o(1/n^2)$. Comme $\sum 1/n^2$ converge, par comparaison à une série à terme positifs, $\sum n^{2025}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge.

o) Faire un DL

p) Posons $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$, alors :

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp(n\ln(1+1/n)) - \mathrm{e} = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})\right)\right) - \mathrm{e} = \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right) - \mathrm{e} \\
&= \mathrm{e}\left(\exp\left(\frac{-1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

On pose alors $u = -\dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}(1/n^2)$, alors $\mathcal{O}(u^2) = \mathcal{O}(1/n^2)$, ainsi on applique le $DL_1(0)$ de $\exp(u) = 1 + u + \mathcal{O}(u^2)$. Ainsi, $u_n = \mathrm{e}\left(1 - 1/2n + \mathcal{O}(1/n^2) - 1\right) \sim \dfrac{\mathrm{e}}{n}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, $\sum \dfrac{-\mathrm{e}}{2n}$ diverge aussi, par comparaison de deux séries à termes négatifs[2], $\sum u_n$ diverge.

1. Rappelons que cette formule se démontre en dérivant $f\colon x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$, on obtient une dérivée nulle, donc f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Enfin on trouve les deux valeurs constantes en calculant $f(1)$ et $f(-1)$.

2. En effet si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes négatif avec $u_n \sim v_n$, alors $-u_n \sim -v_n$ et on en déduit que $\sum -u_n$ et $\sum -v_n$ ont même nature donc que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

1. Supposons que $\sum u_n$ converge avec $(u_n)_n$ une suite positive. Comme $\sum u_n$ converge, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. En multipliant par u_n, on obtient $0 \leqslant {u_n}^2 \leqslant u_n$, or $\sum u_n$ converge, par comparaison de deux SATP, $\sum {u_n}^2$ converge.
2. Si $u_n = 1/n$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} {u_n}^2$ converge mais $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.
3. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum |u_n|$ converge. Comme $\sum |u_n|$ est une SATP, on peut lui appliquer la question 1, $\sum |u_n|^2$ converge. Or, pour tout entier n, ${u_n}^2 = |u_n|^2$. Ainsi, $\sum {u_n}^2$ converge.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $(a-b)^2 \geqslant 0$, donc en développant, $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{u_n v_n} = \sqrt{u_n}\sqrt{v_n} \leqslant \dfrac{u_n+v_n}{2}$. Or $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, comme l'ensemble des séries convergente est un espace vectoriel, $\sum \dfrac{u_n+v_n}{2}$ converge. Par comparaison de deux séries à termes positifs, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Correction de l'exercice 8.

1. Supposons que pour $n \geqslant n_0$, on ait $v_{n+1} \leqslant r v_n$. Posons l'hypothèse de récurrence suivante, pour $n \geqslant n_0$: $\mathscr{P}(n)$: «$v_n \leqslant v_{n_0} r^{n-n_0}$»
   - **Initialisation :** pour $n = n_0$, on a bien $v_{n_0} \leqslant v_{n_0} = v_{n_0}^{n_0-n_0}$, $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.
   - **Hérédité :** soit $n \geqslant n_0$, si $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors $v_{n+1} \leqslant r v_n \leqslant r(v_{n_0} r^{n-n_0}) = v_{n_0} r^{n+1-n_0}$. $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion :** pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_{n_0} r^{n-n_0}$.

   De même, supposons[3] que pour $n \geqslant n_0$, on ait $v_{n+1} \geqslant r v_n$. En divisant par r^{n+1}, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\dfrac{v_{n+1}}{r^{n+1}} \geqslant \dfrac{v_n}{r^n}$, ainsi la suite $(v_n/r^n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante. Dès lors, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n/r^n \geqslant v_{n_0}/r^{n_0}$. En multipliant par r^n le résultat en découle.
2. Supposons que $\ell < 1$, cherchons $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$, il faut alors que $\varepsilon < 1 - \ell$. Posons donc $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$, comme $\ell < 1$, on a $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{n+1}/u_n| = \ell$, on peut donc dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad \ell - \varepsilon \leqslant \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \ell + \varepsilon$$
   posons
$$r = \ell + \varepsilon = \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$
   Ainsi $r < 1$. Comme, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}|/|u_n| \leqslant r$, d'après la question 1, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant |u_{n_0}| r^{-n_0} r^n$, or $\sum r^n$ est une série géométrique convergente car $|r| < 1$. Donc $\sum |u_{n_0}| r^{-n_0} r^n$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge. Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
3. Supposons que $\ell > 1$, cherchons $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$, il faut alors que $\varepsilon < \ell - 1$. Posons donc $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2}$, comme $\ell > 1$, on a $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{n+1}/u_n| = \ell$, on peut donc dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \ell + \varepsilon$$

3. On peut refaire une récurrence, mais proposons une méthode avec plus de panache.

Posons
$$r = \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell - 1}{2} = \frac{\ell + 1}{2} > \frac{1 + 1}{2} = 1$$
Ainsi $r > 1$. Comme, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}|/|u_n| \geqslant r$, d'après question 1, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_n| \geqslant |u_{n_0}| r^{-n_0} r^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

4. Prenons $u_n = 1/n$, alors $u_{n+1} \sim u_n$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \ell$ et $\sum u_n$ diverge. Prenons $u_n = 1/n^2$, alors $u_{n+1} \sim u_n$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \ell$ et $\sum u_n$ converge. Ainsi, si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10. Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$, alors
$$0 \leqslant n u_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$$
Alors par théorème d'encadrement, $n u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, en multipliant par 2, $2n u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Considérons $0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} = u_{2n+1} + 2n u_{2n+1} \leqslant u_{2n+1} + 2n u_{2n}$. Comme la série converge, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par extraction $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et par ce qui précède $2n u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par théorème d'encadrement $(2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Ainsi, la suite des termes pairs de $(n u_n)_n$ tend vers 0 ainsi que la suite des termes impairs de $(n u_n)_n$ tend vers 0. D'après un théorème de cours, $n u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12.

1. Si $\alpha > 1$, alors considérons $\gamma \in]\,1\,;\alpha\,[$, (par exemple $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$), remarquons, alors que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2 \qquad \frac{u_n}{\frac{1}{n^\gamma}} = n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln^\beta(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
En effet, comme $\gamma < \alpha$, $n^{\alpha-\gamma} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et par croissance comparée, $n^{\alpha-\gamma}\ln^\beta(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi $u_n = \mathcal{O}(1/n^\gamma)$. Or $\sum 1/n^\gamma$ est une série de Riemann convergente et à termes positifs, car $\gamma > 1$, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
2. Si $\alpha < 1$, alors
$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}} = \frac{\ln^\beta(n)}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
Ainsi, $1/n = \mathcal{O}\big(1/(n^\alpha \ln^\beta(n)\big)$ Comme $\sum 1/n$ diverge, par la contraposée du théorème de comparaison à une série à terme positifs, $\sum 1/(n^\alpha \ln^\beta(n)$ diverge.
3. Posons la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^\beta(x)}$ définie sur $[\,2\,;+\infty\,[$. En dérivant f et en étudiant le signe de sa dérivée, on trouve $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que f est décroissante sur $[\,n_0\,;+\infty\,[$. De plus, f est continue et positive. D'après le théorème de comparaison série-intégrale, $\sum u_n = \sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant n_0}$ converge. Si $\beta \neq 1$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \qquad \int_{n_0}^{n} \frac{1}{x\ln(x)^\beta}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln(x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_{n_0}^{n} = \frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{\ln(n_0)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

Comme $\ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, $(\ln(n)^{1-\beta})_n$ converge si et seulement si $1-\beta \leqslant 0$. Dans le cas $\beta \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, $\left(\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant 2}$ converge si et seulement si $\beta > 1$. Si $\beta = 1$, alors

$$\int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Correction de l'exercice 13. Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive, on suppose que $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.

1. Si $\ell < 1$, on pose $\varepsilon = (1-\ell)/2 > 0$, ainsi il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon = (1+\ell)/2 = r$$

Comme $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \leqslant r^n$, comme $r < 1$, on sait que $\sum r^n$ converge (série géométrique de raison r avec $|r| < 1$), par critère de comparaison des séries à termes positifs $\sum u_n$ converge.

2. Si $\ell > 1$, on pose $\varepsilon = (\ell-1)/2 > 0$, ainsi il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{u_n} \geqslant \ell - \varepsilon = (1+\ell)/2 = r$$

Comme $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \geqslant r^n$, comme $r > 1$, $r^n \to +\infty$, donc $u_n \to +\infty$, ainsi $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Correction de l'exercice 14.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$. Comme $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent et que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, $\sum w_n - u_n$ converge. Par comparaison entre deux SATP, $\sum v_n - u_n$ converge. Comme $\sum u_n$ converge, par somme $\sum (v_n - u_n) + u_n$ converge. Ainsi, $\sum v_n$ converge.
2. Supposons que $\sum u_n$ converge absolument. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$. Or $\sum |u_n|$ converge, par stabilité par multiplication par un scalaire, $\sum -|u_n|$ converge. En appliquant la première question, $\sum u_n$ converge.

Correction de l'exercice 15.

1. Comme $\sum 1/n^2$ converge et que l'ensemble des séries convergente est un espace vectoriel, $\sum 1/(2n)^2$ converge, de plus, par linéarité de la somme,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les indices pairs et impairs dans $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2}$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ainsi, $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les indices pairs et impairs :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{p=1}^{E(n/2)} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} \frac{1}{(2p+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi, $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Correction de l'exercice 16. 1. $\sum \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann de paramètre x. Ainsi, $\zeta(x)$ est défini ssi $x > 1$. L'ensemble de définition de ζ est $]\,1\,;+\infty\,[$.

2. Soit $(x, x') \in\,]\,1\,;+\infty\,[$ tel que $x < x'$, alors, par linéarité de la somme, $\zeta(x) - \zeta(x') = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^{x'}}\right)$.
Remarquons que pour $n = 1$, $n^x = n^{x'} = 1$, ainsi,

$$\zeta(x) - \zeta(x') = \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^{x'}} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^{x'}}$$

Pour un entier $k \geqslant 2$, $t \mapsto k^{-t} = \exp(-t\ln(k))$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$[4]. Ainsi $\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^{x'}} > 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^{x'}} \geqslant 0$, comme les inégalités larges sont conservées[5] par passage à la limite, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^{x'}} \geqslant 0$. Par somme d'inégalités dont une est stricte, $\zeta(x) - \zeta(x') > 0$. En conclusion, ζ est strictement décroissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$.

3. Soit $x \in\,]\,1\,;+\infty\,[$, $t \mapsto \frac{1}{t^x} = t^{-x}$ est décroissante[6].
   - Soit un entier $k \geqslant 1$. Pour tout $t \in [\,k\,;k+1\,]$, $t^{-x} \leqslant k^{-x}$ en intégrant par croissance de l'intégrale,

   $$\int_k^{k+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} k^{-x}\,\mathrm{d}t$$

   En calculant les intégrales :

   $$\frac{1}{1-x}\left((k+1)^{-x} - k^{-x}\right) \leqslant k^{-x}$$

   Sommons ces inégalités pour $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$:

   $$\frac{1}{x-1}\sum_{1=2}^{n}\left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{1}{x-1}$$

   Comme on reconnaît nue somme télescopique

   $$\frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^x}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$$

   Comme le passage à la limite conserve les inégalités larges :

   $$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x)$$

   - Soit un entier[7] $k \geqslant 2$. Pour tout $t \in [\,k-1\,;k\,]$, $k^{-x} \leqslant t^{-x}$ en intégrant par croissance de l'intégrale,

   $$\int_{k-1}^{k} k^{-x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} t^{-x}\,\mathrm{d}t$$

   En calculant les intégrales :

   $$k^{-x} \leqslant \frac{1}{1-x}\left(k^{-x} - (k-1)^{-x}\right)$$

4. Car de dérivée $t \mapsto -\ln(k)\exp(-t\ln(k)) < 0$.
5. C'est pour cela que l'on affirme que la somme est positive ou nulle et non strictement positive, même si elle l'est.
6. Car de dérivée $t \mapsto (-x)t^{-x-1} < 0$.
7. Attention, ici k ne peut pas valoir 1, car sinon on intégrerait t^{-x} sur $[\,0\,;1\,]$. Or $t \mapsto t^{-x} = \exp(-x\ln(t))$ n'est pas définie en 0 ni prolongeable par continuité car $t^{-x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. On est donc obligé de partir à $k = 2$ quitte à rajouter à la fin le terme pour $k = 1$.

Sommons ces inégalités pour $k \in [\![2\,; n]\!]$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{1}{x-1} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^x} - \frac{1}{k^x} \right)$$

Comme on reconnaît des sommes télescopiques et en rajoutant 1 aux membres de l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1} \left(1 - \frac{1}{n^x} \right)$$

Comme le passage à la limite, quand $n \to +\infty$, conserve les inégalités larges :

$$\zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

Dès lors, pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

Comme $1 + \dfrac{1}{x-1} \underset{x\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$, par théorème d'encadrement des équivalents, il en découle que

$$\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

et donc $\zeta(x) \xrightarrow[x\to1^+]{} +\infty$. Malheureusement, $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $1 + \dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, ainsi nos deux gendarmes ne vont pas au même endroit. Cependant, pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-x}$, ainsi, $\zeta(x) \geqslant 1$. Donc, $1 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$, par le théorème d'encadrement, $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Remarque 1. Cette fonction est la célèbre fonction ζ de Riemann. On peut la prolonger d'une certaine manière sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Un des problèmes les plus complexes est de déterminer où cette fonction s'annule.

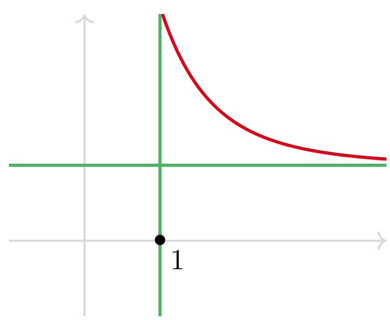

Figure 1 – Graphe de la fonction ζ de Riemann en rouge et vert ses asymptotes.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.