Fonctions à deux variables

Exercice 1 ($\star$). Démontrer que $]\,0\,;1\,[^{\,2}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 ($\star\star$).
1. Montrer qu'une union quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. On pose, $O_n = B(0_{\mathbb{R}^2}, 1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, est-ce que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

Soit F une partie de $\mathbb{R}^2$, on dit que F est fermé si $\mathbb{R}^2\backslash F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ (ils sont aussi ouverts).
5. Montrer qu'une boule fermée de $\mathbb{R}^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (𝄞$\star\star$ ©). Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset F$. Démontrer que $F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 ($\star\star$). Soient $a \in \mathbb{R}^2$, $a' \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ et $r' > 0$.
1. Déterminer une CNS tel que $B(a, r) \subset B(a', r')$.
2. Démontrer qu'une boule ouverte a un unique centre et un unique rayon [1].

Exercice 5 ($\star$). Soit C une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que C est convexe si pour tout $(a, b) \in C^2$ et pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$, $ta + (1 - t)b \in C$.
1. Montrer que les boules ouvertes et fermées sont convexes.
2. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$), montrer que f est une fonction convexe ssi $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}\ y \geqslant f(x)\}$ est convexe.

Cela justifie pourquoi les parties convexes et les fonctions convexes partagent le même nom alors que ce sont deux concepts a priori différent.

Exercice 6 ($\star$). On pose $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + y^6}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Étudier la continuité de f en $(0, 0)$.

Exercice 7 ($\star\star$). Étudier la continuité de la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x - y}$ si $x \neq y$ et $f(x, x) = \mathrm{e}^x$.

1. Notez qu'il a fallu attendre la prépa, pour démontrer que si on avait un disque, alors son rayon et son centre était unique...

Exercice 8 ($\star$). Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Étudier la dérivabilité de $\varphi\colon t \mapsto f(\mathrm{e}^t, t^3)$ et dériver cette fonction.

Exercice 9 ($\star$). Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t, t^2) = 42$. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

Exercice 10 ($\star$). Déterminer le gradient de $f\colon (x, y) \mapsto xy\mathrm{e}^{x^2}$.

Exercice 11 (𝄞$\star\star$). Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, $f(tx, ty) = tf(x, y)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 12 ($\star$). Soit $f\colon x \mapsto \|x\|$
1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ puis déterminer son gradient.
2. Montrer que f n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 (𝄞$\star\star$). Soit $c > 0$. Le but est de chercher toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial f}{\partial t}$.
1. Démontrer que les fonctions $(x, t) \mapsto g(x + ct)$ avec $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont solutions du problème.
2. Soit f une solution de ce problème. À l'aide du changement de variable $u = x + ct$ et $v = x - ct$, déterminer une expression de f.

Cet exercice peut-être généralisé avec la résolution de l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ qui modélise les ondes.

Exercice 14 ($\star\star\star$). Soit un triangle ABC du plan $\mathbb{R}^2$. Démontrer que $M \mapsto AM^2 + BM^2 + CM^2$ admet un minimum en un unique point à déterminer.
On pourra utiliser le fait que si $f\colon B_f(0, r) \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction f est bornée et ses bornes sont atteintes.