Intégrales

1. On reconnaît une fonction de la forme $u'u^{2024}$, ainsi, une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln^{2024}(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \dfrac{\ln^{2025}(x)}{2025}$
2. Les racines de l'équation $x^2+7x+12 = 0$ sont -3 et -4. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+7x+12 = (x+3)(x+4)$. Il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, -4\}$,
$$\frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}$$
   - En multipliant par $x+3$, il vient $\dfrac{1}{x+4} = A + \dfrac{B(x+3)}{x+4}$, ainsi, $A = 1$.
   - En remultipliant, par $x+4$, il vient $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{A(x+4)}{x+3} + B$, ainsi, $B = -1$.

   Par conséquent :
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+12} &= \int_0^1 \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\,\mathrm{d}x = [\ln(x+3) - \ln(x+4)]_0^1 \\ &= \ln(4) - \ln(5) - (\ln(3) + \ln(4)) = \ln\left(\frac{16}{15}\right)\end{aligned}$$
3. En utilisant la question précédente et la linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+7x+12} &= \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(2x+7) - \frac{7}{2}}{x^2+7x+12}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+7}{x^2+7x+12}\,\mathrm{d}x - \frac{7}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+12} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(|x^2+7x+12|)\right]_0^1 - \frac{7}{2}\ln\left(\frac{16}{15}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{20}{12}\right) - \frac{7}{2}\ln\left(\frac{16}{15}\right)\end{aligned}$$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$, ainsi une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-10x+25}$ est $x \mapsto \dfrac{-1}{x-5} = \dfrac{1}{5-x}$ sur $]-\infty\,;5\,[$ ou sur $]\,5\,;+\infty[$.
5. Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t+3\mathrm{i}} &= \int^x \frac{2t-3\mathrm{i}}{(2t+3\mathrm{i})(2t-3\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{2t}{4t^2+9} - \mathrm{i}\frac{3}{4t^2+9}\,\mathrm{d}t \\ &= \int^x \frac{1}{4} \times \frac{8t}{4t^2+9} - \frac{3\mathrm{i}}{4} \times \frac{1}{t^2+\frac{9}{4}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\ln(4x^2+9) - \frac{3\mathrm{i}}{4} \times \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)\end{aligned}$$
   Ainsi, $x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln(4x^2+9) - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\arctan\left(\dfrac{2x}{3}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x+3\mathrm{i}}$ sur $\mathbb{R}$.
6. On pose $u = \sin(t)$, alors $\mathrm{d}u = \cos(t)\,\mathrm{d}t$, de plus, $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t) = 1 - u^2$. Par conséquent :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{2-\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{2-(1-u^2)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$
7. On pose $u\colon x \mapsto \sin(x)$ et $v\colon x \mapsto \ln(1+\cos(x))$ sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, comme cos prend des valeurs positives sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, v est bien définie. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ et on peut procéder à une

intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(1+\cos(x))\,\mathrm{d}x &= [\sin(x)\ln(1+\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\times\frac{-\sin(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= 0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(x)\,\mathrm{d}x = [x-\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

Complexes

1. $z = \dfrac{2+3\mathrm{i}}{7-2\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\mathrm{i})(7+2\mathrm{i})}{(7-2\mathrm{i})(7+2\mathrm{i})} = \dfrac{14-6+\mathrm{i}(21+4)}{53} = \dfrac{8}{53}+\mathrm{i}\dfrac{25}{53}$
2. $|-10\sqrt{3}+\mathrm{i}10| = \sqrt{300+100} = 20$, ainsi,
$$\begin{aligned}-10\sqrt{3}+\mathrm{i}10 &= 20\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \\ &= 20\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 20\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}}\end{aligned}$$
3. Les racines n-ièmes de l'unité sont les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k\in[\![\,0\,;n-1\,]\!]$.
4. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, alors :
$$\begin{aligned}(a+\mathrm{i}b)^2 = 8-6\mathrm{i} &\iff \begin{cases}|(a+\mathrm{i}b)^2| &= |8-6\mathrm{i}| \\ (a+\mathrm{i}b)^2 &= 8-6\mathrm{i}\end{cases} \iff \begin{cases}|a+\mathrm{i}b|^2 = \sqrt{64+36} \\ a^2-b^2+2\mathrm{i}ab = 8-6\mathrm{i}\end{cases} \\ &\iff \begin{cases}a^2+b^2 &= 10 \\ a^2-b^2 &= 8 \\ 2ab &= -6\end{cases} \iff \begin{cases}a^2+b^2 &= 10 \\ 2a^2 &= 18 \\ 2ab &= -6\end{cases} \\ &\iff \begin{cases}a^2 &= 9 \\ b^2 &= 10-9 \\ ab &= -3\end{cases} \\ &\iff \begin{cases}a &= \pm 3 \\ b &= \pm 1 \\ ab &= -3\end{cases}\end{aligned}$$
La dernière équation indique que a et b sont de signe opposé, ainsi, les racines carrées de $8-6\mathrm{i}$ sont $3-\mathrm{i}$ et $-3+\mathrm{i}$.
5. Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = (1-3\mathrm{i})^2-4\times(-4) = 1-6\mathrm{i}-9+16 = 8-6\mathrm{i}$. D'après la question précédente, si on pose $\delta = 3-\mathrm{i}$, alors $\delta^2=\Delta$, ainsi, les solutions de l'équation sont $z_1 = \dfrac{-(1-3\mathrm{i})+\delta}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-(1-3\mathrm{i})-\delta}{2}$, après simplification, on trouve $z_1 = 1+\mathrm{i}$ et $z_2 = -2+2\mathrm{i}$
6. Soit $z\in\mathbb{C}$, alors d'après la question précédente, $z^8+(1-3\mathrm{i})z^4-4=0$ ssi $(z^4)^2+(1-3\mathrm{i})z^4-4=0$ ssi $z^4 = 1+\mathrm{i}$ ou $z^4=-2+2\mathrm{i}$. Il s'agit donc de déterminer les racines quatrièmes de $1+\mathrm{i}$ et $-2+2\mathrm{i}$. Or, $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, donc $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, les racines quatrièmes de $1+\mathrm{i}$ sont : $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{16}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{4}}$ pour $k\in[\![\,0\,;3\,]\!]$.
Or, $|-2+2\mathrm{i}| = \sqrt{8}$, donc $-2+2\mathrm{i} = \sqrt{8}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}$. Ainsi, les racines quatrièmes de $1+\mathrm{i}$ sont : $\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{16}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{4}}$ pour $k\in[\![\,0\,;3\,]\!]$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est
$$\left\{\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{16}}, \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{9\pi}{16}}, \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{17\pi}{16}}, \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{25\pi}{16}}, 2^{\frac{3}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{16}}, 2^{\frac{3}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{11\pi}{16}}, 2^{\frac{3}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{19\pi}{16}}, 2^{\frac{3}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{27\pi}{16}}\right\}$$

7. La fonction f n'est pas bornée si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in I \qquad |f(x)| > M$$

8. Soient $f\colon I \to \mathbb{C}$ et $g\colon I \to \mathbb{C}$ bornées, ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$ et il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $|g(x)| \leqslant N$. Ainsi, soit $x \in I$, par inégalité triangulaire :

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant M + N$$

Par conséquent, $f+g$ est bornée. De même, pour $x \in I$,

$$|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)| \times |g(x)| \leqslant MN$$

Par conséquent, fg est bornée.

9. Prenons $I = \mathbb{R}$ et $f\colon x \mapsto x$ et $g\colon x \mapsto -x$. Soit $M \in \mathbb{R}$, si $M \leqslant 0$, alors $|f(3)| = 3 > M$, si $M > 0$, alors $|f(M+1)| = |M+1| = M+1 > M$, ainsi, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est non bornée. On montre de la même façon que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est non bornée. En revanche $f+g$ est bornée, car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| = |0| = 0 \leqslant 42$$

On a donc montré que si f et g sont non bornées, alors $f+g$ n'est pas nécessairement non bornée.

Fonctions usuelles

On considère dans cet exercice les fonctions f et g définies par :

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) \qquad \text{et} \qquad g\colon x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$$

1. $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$
2. arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 0$ (comme demi-somme de deux exponentielles), ainsi, $1 + \mathrm{ch}(x) \geqslant 1 > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{ch}(x) \neq 0$. Ainsi, $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Par composée, g est définie sur $\mathbb{R}$.
4. $f(0) = \dfrac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(0)) = \dfrac{1}{2}\arctan(0) = 0$ et $g(0) = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{sh}(0)}{1+\mathrm{ch}(0)}\right) = \arctan(0) = 0$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par identité remarquable :

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)) \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) \times \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1\end{aligned}$$

6. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont, g comme composée et quotient (le dénominateur ne s'annulant pas d'après ce qu'on a montré lors de la question 1) de fonctions qui le sont. Pour $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la dérivée d'une composée et que $1 + \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}'(x)\frac{1}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{2\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)}$$

et

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x))-\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}\times\frac{1}{1+\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2}\\
&= \frac{\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)}{1+2\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}\\
&= \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{2\mathrm{ch}(x)+2\mathrm{ch}^2(x)}\\
&= \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{2\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}\\
&= \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)}
\end{aligned}$$

7. La fonction $h=f-g$ est dérivable comme différence de fonctions dérivables, de plus, $h'=f'-g'=0$ d'après la question précédente. La fonction h est ainsi constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. De plus, $h(0)=f(0)-g(0)=0-0=0$, d'après la question 4. Ainsi, la fonction h est la fonction nulle. Il en découle que $f=g$.
8. La fonction tan est définie sur $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid \in\mathbb{Z}\right\}$.
9. Pour x dans $\mathbb{R}$, on a $2f(x)=\arctan(\mathrm{sh}(x))\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\subset D$ et donc $\tan(2f(x))$ est bien défini. De plus :
$$\tan(2f(x))=\tan(\arctan(\mathrm{sh}(x)))=\mathrm{sh}(x)$$
10. On dit que $f\colon I\to J$ est bijective si
$$\forall y\in J\quad \exists! x\in I\qquad y=f(x)$$
11. Supposons que $f\colon I\to J$ est bijective. Soit $y\in J$, alors il existe un unique $x\in I$ tel que $y=f(x)$, on pose alors $f^{-1}(y)=x$. Ceci définit une fonction $f^{-1}\colon J\to I$.
12. La fonction k est dérivable comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas), et pour $x\in\mathbb{R}$,
$$k'(x)=\frac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x))-\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}=\frac{\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}=\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}=\frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}>0$$
Donc k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad k(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}=\frac{2\mathrm{sh}(x)}{2+2\mathrm{ch}(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}}=\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(2e^{-x}+1+e^{-2x})}=\frac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}+1+e^{-2x}}$$
De plus, $1-\mathrm{e}^{-2x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ et $2\mathrm{e}^{-x}+1+\mathrm{e}^{-2x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$, par quotient, $k(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$. Par imparité de k on a aussi $k(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-1$. Comme k est continue (car dérivable) et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, k est une bijection de $\mathbb{R}$ sur
$$k(\mathbb{R})=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x)\,;\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left]-1\,;1\right[$$
13. Comme $k(0)=0$ et $k'(0)=1/2$, l'équation de la tangente de k en 0 est $y=0+x/2$
14. Soit $y\in\left]-1\,;1\right[$, il existe un unique $x\in\mathbb{R}$ tel que $y=k(x)$, alors :
$$\begin{aligned}
y &= \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\\
y(2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}) &= \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\\
2y+\mathrm{e}^x(y-1)+\mathrm{e}^{-x}(y+1) &= 0\\
(\mathrm{e}^x)^2(y-1)+2y\mathrm{e}^x+(y+1) &= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, e^x est une solution de l'équation :

$$(y-1)X^2 + 2yX + (y+1) = 0$$

Comme $y - 1 \neq 0$, on obtient une équation du second degré dont le discriminant vaut

$$(2y)^2 - 4(y-1)(y+1) = 4 > 0$$

Les solutions de cette équation du second degré sont :

$$\frac{-2y+2}{2(y-1)} \quad \text{et} \quad \frac{-2y-2}{2(y-1)}$$

On[1] en déduit que :

$$\mathrm{e}^x \in \left\{-1; \frac{y+1}{1-y}\right\}$$

Remarquons que $\mathrm{e}^x > 0$ contrairement à -1, donc nécessairement $\mathrm{e}^x = \dfrac{y+1}{1-y}$. Ces deux quantités étant strictement positives ($-1 < y < 1$), en appliquant le logarithme, il vient $x = \ln\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right)$. Ainsi, on a montré que

$$k^{-1} : \begin{cases}]-1\,;1\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad y \quad \longmapsto \ln\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right) \end{cases}$$

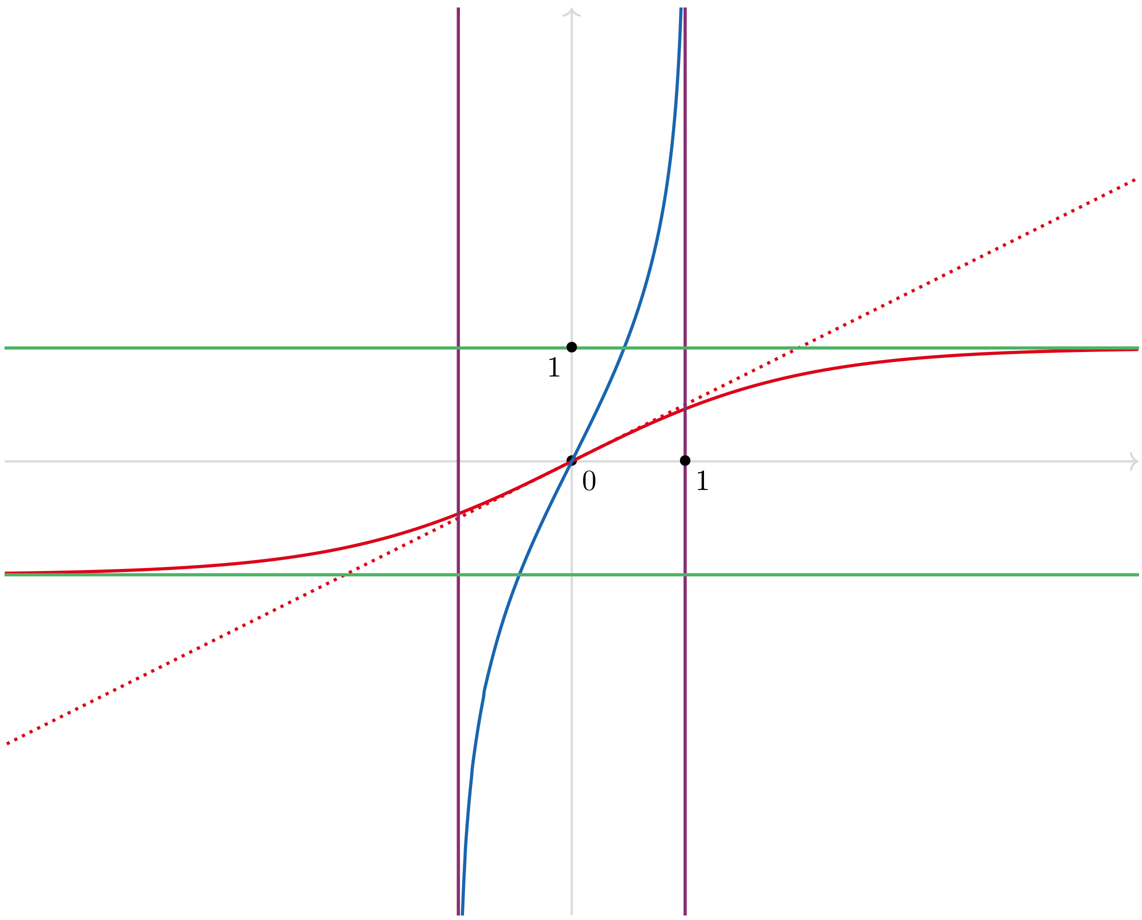

Figure 1 – En rouge la courbe de k, en bleu la courbe de k^{-1}, en pointillé la tangente de k en 0, en vert les asymptotes de k et en violet les asymptotes de k^{-1}.

15.

1. On aurait pu aussi remarquer que -1 était racine évidente et que comme le produit des racines vaut $\dfrac{y+1}{y-1}$ en déduire la deuxième racine.

16. On a $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$.
17. Pour $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$, alors $\tan(\theta) \neq \pm 1$ et donc le dénominateur ne s'annule pas et

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \tan(2\theta)$$

18. D'après la question 12, pour $x \in \mathbb{R}$, $-1 < k(x) < 1$ et arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ceci implique que $-\dfrac{\pi}{4} < \arctan(k(x)) < \dfrac{\pi}{4}$ puis $2g(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi $2g(x) \in D$ et $\tan(2g(x))$ est bien défini. De plus, on calcule :

$$\begin{aligned}
\tan(2g(x)) &= \frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2(g(x))} = \frac{2\tan(\arctan(k(x)))}{1-\tan^2(\arctan(k(x)))} = \frac{2k(x)}{1-k^2(x)} \\
&= \frac{\dfrac{2\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}}{1-\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2} \\
&= \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{(1+\mathrm{ch}(x))^2 - \mathrm{sh}^2(x)} = \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{1+2\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(x)^2-\mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{2+2\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{sh}(x)
\end{aligned}$$

19. Les questions précédentes montrent que pour $x \in \mathbb{R}$, $\tan(2f(x)) = \tan(2g(x))$, ainsi $\arctan(\tan(2f(x))) = \arctan(\tan(2g(x)))$, comme $2f(x))$ et $2g(x)$ sont dans $]-\pi/2\,;\pi/2[$ et qu'arctan est la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à $]-\pi/2\,;\pi/2[$, on obtient $2f(x) = 2g(x)$. En divisant par 2, on a donc démontré que $f = g$.
20. On a :

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{3^{1/2}+3^{-1/2}}{2} = \frac{3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

et de même :

$$\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} - e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{3^{1/2}-3^{-1/2}}{2} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

21. L'égalité $f(x) = g(x)$ pour la valeur $\dfrac{1}{2}\ln(3)$ donne donc :

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\right)$$

Il en découle que :

$$\frac{\pi}{12} = \arctan\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$$

On en déduit que $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$.

Involution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $g(g(x)) = g(\pi - x) = \pi - (\pi - x) = x$, ainsi, g est une involution.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, si $x = 0$, alors $h(h(x)) = h(h(0)) = h(0) = 0 = x$, si $x \neq 0$, $h(h(x)) = h\left(\dfrac{1}{x}\right)$, or $\dfrac{1}{x} \neq 0$, donc $h(h(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = x$. Par conséquent, h est une involution.

3. Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, supposons que $f(x) = f(x')$, alors en appliquant f, on obtient $f(f(x)) = f(f(x'))$, en utilisant le fait que f soit une involution, il en découle que $x = x'$.
4. Soit f une involution croissante, soit $x \in \mathbb{R}$, alors il y a deux cas : $f(x) \leqslant x$ et $f(x) \geqslant x$:
   - Si $f(x) \leqslant x$, alors en appliquant la fonction f qui est croissante, $f(f(x)) \leqslant f(x)$ donc $x \leqslant f(x)$. Par double inégalité, on obtient $f(x) = x$
   - Si $f(x) \geqslant x$, alors en appliquant la fonction f qui est croissante, $f(f(x)) \geqslant f(x)$ donc $x \geqslant f(x)$. Par double inégalité, on obtient que $f(x) = x$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
5. Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche x tel que $y = h(x)$, or $y = h(h(y))$ en posant $x = h(y) \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que $y = h(x)$, ainsi, y admet au moins un antécédent. Soit x' un éventuel autre antécédent de y par h, alors $h(x') = y = h(x)$, en utilisant la question précédente, $x' = x$. Par conséquent, y admet un unique antécédent par h et c'est $h(y)$. Dès lors, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection, de plus, $h^{-1}(y) = h(y)$ et ce pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc $h^{-1} = h$.
6. Pour $x \leqslant 0$, on pose $k(x) = x$ et pour $k > 0$, on pose $k(x) = 1/x$, ainsi, $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant 0$, $k(x) = x \leqslant 0$, donc $k(k(x)) = k(x) = x$, si $x > 0$, $k(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, et donc $k(k(x)) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Par conséquent, k est une involution. Ce n'est pas une fonction de la forme $x \mapsto a - x$ (une telle fonction tend vers $-\infty$ en $+\infty$, tandis que $k(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ce n'est pas la fonction $x \mapsto x$, car $k(3) = \dfrac{1}{3} \neq 3$, ce n'est pas h, car $h(-2) = \dfrac{-1}{2} \neq k(-2) = -2$.

Équation fonctionnelle

1. Montrons d'abord, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, tout d'abord $u_0 = x > 0$, soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n > 0$, alors comme $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $u_{n+1} = f(u_n) > 0$, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, alors comme $u_n > 0$ par hypothèse sur f, il vient $f(f(u_n)) = 3u_n - 2f(u_n)$, de plus, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(f(u_n)) = f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, on obtient donc $u_{n+2} = 3u_n - 2u_{n1}$, ce qui est le résultat voulu.
2. Posons[2] $\alpha = \dfrac{u_0 - u_1}{4}$ et $\beta = \dfrac{3u_0 + u_1}{4}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}(n)$: «$u_n = \alpha(-3)^n + \beta$».
   - Pour $n = 0$, $\alpha(-3)^0 + \beta = \alpha + \beta = \dfrac{u_0 - u_1}{4} + \dfrac{3u_0 + u_1}{4} = u_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Pour $n = 1$, $\alpha(-3)^0 + \beta = -3\alpha + \beta = -3\dfrac{u_0 - u_1}{4} + \dfrac{3u_0 + u_1}{4} = u_1$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies, alors, en utilisant la question 1 :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= -2u_{n+1} + 3u_n \\
&= -2(\alpha(-3)^{n+1} + \beta) + 3(\alpha(-3)^n + \beta \\
&= (-3)^n\left((-2)\alpha(-3) + 3)\right) + \beta\,(-2+3) \\
&= (-3)^n \times 9 + \beta = (-3)^n(-3)^2 + \beta \\
&= (-3)^{n+2} + \beta
\end{aligned}$$

   Par conséquent, $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie. Par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha(-3)^n + \beta$.
3. Si $\alpha \neq 0$, alors $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$
   - Si $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{2n+1} = -\alpha 3^{2n+1} + \beta$, or comme $3^{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $-\alpha < 0$, par produit, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$
   - Si $\alpha < 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \alpha 3^{2n} + \beta$. Or $3^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $\alpha < 0$, par produit $u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

2. Pour comprendre pourquoi on a posé ce α et ce β, il faut comprendre qu'on cherche α et β tel que $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = -3\alpha + \beta$. On résout donc le système

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha + \beta \\ u_1 &= -3\alpha + \beta \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} u_0 &= \alpha + \beta \\ u_1 - u_0 &= -4\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= \dfrac{u_0 - u_1}{4} \\ \beta &= u_0 - \alpha = \dfrac{3u_0 + u_1}{4} \end{cases}$$

4. Si $u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, on pose, $v_n = u_{2n}$ alors pour $M = -1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$, alors $v_n \leqslant -1$, en particulier $u_{2n_0} = v_{n_0} \leqslant -1 < 0$. Si $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, on pose, $v_n = u_{2n+1}$ alors pour $M = -1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$, alors $v_n \leqslant -1$, en particulier $u_{2n_0+1} = v_{n_0} \leqslant -1 < 0$.
5. Comme a prouvé à la question 1 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on obtient une contradiction, ainsi, nécessairement, $\alpha = 0$, dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \beta$, pour $n = 0$, $\beta = u_0 = x$.
6. D'après ce qui précède, $f(x) = f(u_0) = u_1 = \beta = x$, et ce pour tout $x > 0$. On a donc montré que si $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifier, pour tout $x > 0$, $f(f(x)) = 3x - 2f(x)$, alors $f\colon x \mapsto x$.

   Réciproquement, si $f\colon x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x > 0$, $3x - 2f(x) = 3x - 2x = x$, tandis que $f(f(x)) = f(x) = x$, ainsi $f\colon x \mapsto x$ est bien une solution.

   Par analyse-synthèse (déguisée), la seule fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tout $x > 0$, $f(f(x)) = 3x - 2f(x)$ est la fonction $f\colon x \mapsto x$.

Exercice limite

Soit $x \in [\,0\,;\pi\,]$, alors

$$\frac{n\sin(x)}{x+n} - \sin(x) = \frac{n\sin(x) - (x+n)\sin(x)}{x+n} = \frac{-x\sin(x)}{x+n} \leqslant 0$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n} - \sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi 0\,\mathrm{d}x = 0$, par linéarité de l'intégrale $\displaystyle u_n - \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$, soit $\displaystyle u_n \leqslant \int_0^\pi \sin(x) = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$.

De plus, $\displaystyle\sin(x) - \frac{n\sin(x)}{x+n} = \frac{x\sin(x)}{x+n} \leqslant \frac{\pi\times 1}{x+n} \leqslant \frac{\pi}{n}$, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x) - \frac{n\sin(x)}{x+n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi \frac{\pi}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{n}$. Par linéarité de l'intégrale $2 - u_n \leqslant \frac{\pi^2}{n}$. En rassemblant les deux résultat, $2 - \frac{\pi^2}{n} \leqslant u_n \leqslant 2$.

Comme $2 - \frac{\pi^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, d'après le théorème d'encadrement $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$.