DM1: à rendre le vendredi 8 Novembre 2024

Exercice 1 : il ne faut pas traiter intégralement les primitives comme des sauvages

Cet exercice est facultatif si, lors du DS2, il y avait au moins cinq questions de l'exercice sur les intégrales où vous avez eu au moins trois points sur quatre.

1. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x - 20}$ en précisant le ou les intervalles.
2. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3x + 3}$ en précisant le ou les intervalles.
3. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2 + 12x + 36}\,\mathrm{d}x$.
4. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$
5. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
6. À l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x + 3x\ln(x)}$
7. À l'aide d'un changement de variable, calculer une primitive de $x \mapsto \cos(\ln(x))$

Exercice 2 : quatre fonctions de référence pour faire un gâteau anglais

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} < 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arccos\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right) + 2\arctan(\mathrm{e}^x) = \pi$$

Exercice 3 : les intégrales sont de la party !

Les questions 3 et 4 sont facultatives.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

1. Calculer $u_n - u_{n+1}$ sous forme d'intégrale.
2. En remarquant que $u_n = \displaystyle\int_0^1 1 \times (1+x^2)^{-n}\mathrm{d}x$ et en procédant par une intégration par parties, déterminer une relation entre u_n et u_{n+1}
3. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$.
4. La suite $(u_n)_n$ converge-t-elle ?

Exercice 4 : montrer toute l'amplitude de vos capacités

1. Mettez $3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique
2. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} y'' + 6y' + 13y & = & 26 \\ y(0) & = & 5 \\ y'(0) & = & -6\sqrt{3} - 9 \end{cases}$$
On notera f la solution. On mettra les termes en cosinus et en sinus sous la forme $A\cos(\omega x + \varphi)$ où on explicitera A, ω et φ.
3. Résoudre les équations d'inconnue x suivantes :
   (a) $f(x) = 2$
   (b) $f(x) = 2 + 6\mathrm{e}^{-3x}$
   (c) $f(x) = 2 - 6\mathrm{e}^{-3x}$
4. Dessiner cette solution avec les fonctions auxiliaires $x \mapsto 2 \pm 6\mathrm{e}^{-3x}$.

Problème : va falloir brancher Lambert

La question 11 est facultative.
Le but de l'exercice est de définir la fonction de Lambert et d'étudier certaines de ses propriétés. On considère dans tout ce problème, l'application :
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x\mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

1. Faire l'étude complète de la fonction f : variations en terme de stricte monotonie et limites au bord de l'intervalle.
2. Tracer soigneusement sur un grand graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f.
3. Donner les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points abscisse 0 et -1 et les porter sur le graphique.
4. Justifier que l'application $g\colon \begin{cases} [-1\,;+\infty[\longrightarrow [-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.

Dans la suite du sujet, la bijection réciproque de g est notée W.

5. Justifier que W est dérivable sur $]-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.
6. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
7. Donner les équations des tangentes à la courbe de W aux points d'abscisse 0 et $-\mathrm{e}^{-1}$.
8. Tracer, sur le même graphique que $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_W$ représentant W et ses deux tangentes.
9. Prouver que
$$\forall x \in\,]-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[\,\setminus\{0\} \qquad W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$
10. Démontrer que l'application $h\colon \begin{cases}]-\infty\,;-1] \longrightarrow [-\mathrm{e}^{-1}\,;0[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.
W et V sont appelées les deux branches de la fonction de Lambert et elles ne s'expriment pas à l'aide de fonctions usuelles.)

11. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
$$x\mathrm{e}^{x} = m \qquad (E)$$
Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (E). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.