DM2 : à rendre le 6 décembre

Vous ne pourrez pas faire les questions 13 à 16 avant la fin du chapitre sur les suites.

Wallis in wonderland [1]

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Grâce à la formule du binôme de Newton, linéariser $\cos^2(t)$, $\cos^3(t)$, $\cos^4(t)$, $\cos^5(t)$ et $\cos^6(t)$.

Remarque 1. On ne connaît pas de primitives explicites de $t \mapsto \cos^n(t)$ pour un entier n quelconque.

2. Calculer W_0, W_1, W_2, W_3 et W_4.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Montrer que $(W_n)_n$ est décroissante.
5. En déduire que $(W_n)_n$ est une suite convergente.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
   Indication : se rappeler que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$
8. Montrer que $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Que vaut cette constante ?
9. Soit $p \in \mathbb{N}$, exprimer à l'aide de factorielles les produits suivants :
   - $1 \times 2 \times \ldots \times p = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} k$
   - $2 \times 4 \times 6 \ldots \times (2p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (2k)$
   - $1 \times 3 \times 5 \ldots \times (2p+1) = \displaystyle\prod_{k=0}^{p} (2k+1)$
10. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer W_{2p} en fonction de W_{2p-2} puis en fonction de W_{2p-4} en réitérant le processus exprimer W_{2p} en fonction de W_0 et de certaines factorielles et de puissances.

Le raisonnement que l'on vient de faire peut sembler peu rigoureux avec l'usage des ... on peut rendre ça rigoureux en laissant cette partie au brouillon et procéder comme suit :

11. Montrer, par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a
$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$
13. Déduire de la question 12 que $W_{n+1} \sim W_n$.
14. En déduire un équivalent de W_n, quelle est la limite de W_n ?
15. En admettant [2] qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ déterminer la valeur de C

L'équivalent de $n!$ une fois C trouvé s'appelle la formule de Stirling et sera une formule à connaître en deuxième année.

16. À l'aide de la formule de Stirling, en déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

1. Merci à Armand Mabondzo d'avoir proposé ce titre.
2. On admet ce résultat provisoirement, et on le démontrera en fin d'année.