DM3 à rendre le vendredi 20 Décembre 2024

Une suite télévisuelle

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{8}({u_n}^2 + 2u_n)$ étudier sa monotonie puis sa convergence. On pourra s'aider des fonctions $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{8}(x^2 + 2x)$ et de $g\colon x \mapsto f(x) - x$

Une suite en escargot à savoir traiter vite

On considère $u_0 \in \mathbb{R}_+$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$. Posons, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.

2. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, quelles sont les valeurs possibles de ℓ ?
3. Dans cette question seulement, on prend $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Représenter graphiquement la fonction f et le tracé soigné des premiers points de la suite $(u_n)_n$.

On pose $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et on fixe maintenant $u_0 \in [\,0\,;\ell\,]$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [\,0\,;\ell\,]$ et $u_{2n+1} \in [\,\ell\,;1\,]$.
5. Étudier le signe de $x \mapsto (f \circ f)(x) - x$.
6. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier les variations de $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$.
7. En déduire que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent. En déduire que $(u_n)_n$ converge.