Chapitre 8

Calcul matriciel

Table des matières

1 Définition des matrices et opérations **2**

2 Matrices élémentaires, opérations élémentaires et systèmes linéaires **4**

2.1 Matrices élémentaires et opérations élémentaires 4

2.2 Systèmes linéaires 5

3 Matrices carrées **5**

3.1 Cas particuliers de matrices carrées 6

3.2 Inverse d'une matrice carrée 7

4 Méthodes **11**

Dans tout ce chapitre, n, p, q et r sont des entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour deux entiers i et j, on note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Le nombre $\delta_{i,j}$ est appelé le **symbole de Kronecker**. Remarquons que $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$.

1 Définition des matrices et opérations

Définition d'une matrice

On appelle **matrice** de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,j} & \dots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

On note $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ (ou $M = (m_{i,j})_{i,j}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille). Le coefficient à la i-ième ligne et la j-ième colonne est $m_{i,j}$. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $p = n$, on dit que $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est une **matrice carrée**. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à la place de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2 & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Remarque 1.
- On note $0_{n,p}$ la matrice de taille (n,p) dont les coefficients sont tous nuls, appelée **matrice nulle**.
- La matrice $I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée **matrice identité** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $p = 1$ et $M \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}$. On dit que M est une **matrice colonne**.
- Si $n = 1$ et $M \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$, alors $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,p} \end{pmatrix}$. On dit que M est une **matrice ligne**.
- Si $n = p = 1$ et $M \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$, alors $M = (m_{1,1})$, on assimile donc M à un nombre et on note $M = m_{1,1}$.
- Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ alors $A = B$ ssi pour tout $(i,j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; p]\!]$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Définition de la somme de deux matrices

On définit une addition entre $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A + B =$

Remarque 2. On n'additionne seulement deux matrices de même taille pour obtenir une nouvelle matrice de même taille.

Proposition n° 1 : propriétés de l'addition de deux matrices

Soient $(A,B,C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$.

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativité)
2. $A+B = B+A$ (commutativité)
3. $A + 0_{n,p} = A$ ($0_{n,p}$ est le neutre de l'addition)
4. $A + (-a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = 0_{n,p}$ (existence de l'opposé)

Définition du produit d'une matrice par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 3. Calculer λA si $\lambda = 3$ et $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition n° 2 : propriétés du produit d'une matrice par un scalaire

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

1. $1A = A$ et $0A = 0_{n,p}$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Définition du produit de deux matrices

Si $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit $C = A \times B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :$\forall (i, j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; q]\!] \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

Remarque 3. Il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. pour faire le produit de $A \times B$. Le produit $A \times B$ peut être possible sans que le produit $B \times A$ le soit.

Exemple 4. Dans les cas suivants, indiquez si le produit AB est possible et si oui effectuez-le (idem pour BA).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 5 & -28 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mathrm{i} & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Péril imminent : le produit matriciel ***«hélas l'anneau (des matrices) est traître»***

- Le produit matriciel a une condition sur les tailles pour être défini (condition à connaître)
- Le produit matriciel n'est pas un produit terme à terme (formule à connaître)
- Les matrices AB et BA peuvent être différentes (non commutativité)
- Si $AB = 0_{n,q}$, on ne peut rien en déduire (non intégrité)
- Même si A est non nul, $AB = AB'$ n'implique pas $B = B'$ (pas de simplification d'égalité)

Proposition n° 3 : propriétés de la multiplication des matrices

1. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $A \times I_p = A$ $\quad A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$ $\quad I_n \times A = A$ $\quad 0_{q,n}A = 0_{q,p}$
2. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors $(AB)C = A(BC)$ (associativité du produit matriciel)
3. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. Si $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité)
5. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$, $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité)

Définition de la transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **transposée** de A la matrice $A^\top = (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A^\top =$

Remarque 4. Les lignes de A forment donc les colonnes de $A^\top$ et vice versa.

Proposition n° 4 : propriétés de la transposée

Soient $(A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $(A^\top)^\top = A$, $(A + \lambda B)^\top = A^\top + \lambda B^\top$, $(AC)^\top = C^\top A^\top$.

2 Matrices élémentaires, opérations élémentaires et systèmes linéaires

2.1 Matrices élémentaires et opérations élémentaires

Définition d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $(a,b) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, on appelle $E_{a,b} = (\delta_{i,a}\delta_{j,b})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **matrice élémentaire** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 5. Les coefficients de $E_{a,b}$ sont nuls sauf celui à la a-ième ligne et b-ième colonne qui vaut 1.

Exemple 6. Écrire toutes les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

Proposition nº 5 : décomposition d'une matrice en combinaison linéaire de matrices élémentaires

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors,
$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}E_{i,j}$$
où $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition nº 6 : produit de deux matrices élémentaires

Pour $(E_{a,b}, E_{c,d}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices élémentaires,
$$E_{a,b}E_{c,d} = \delta_{b,c}E_{a,d} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K}).$$

Remarque 6. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $E_{a,b} \in \mathscr{M}_{p}(\mathbb{K})$, $ME_{a,b}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la b-ième qui vaut la a-ième colonne de M. Si $E_{a,b} \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})$, $E_{a,b}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la a-ième qui vaut la b-ième ligne de M.

Définition des matrices d'opérations élémentaires

1. Si $a \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle $D_a(\lambda) = I_n + (\lambda-1)E_{a,a}$ **matrice de dilatation**.
2. Si $(a,b) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $a \neq b$, on appelle $P_{a,b} = I_n - E_{a,a} - E_{b,b} + E_{a,b} + E_{b,a}$ **matrice de transposition**.
3. Si $(a,b) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $a \neq b$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle $T_{a,b}(\lambda) = I_n + \lambda E_{a,b}$ **matrice de transvection**.

Remarque 7. Les tailles de $E_{a,b}$, $D_a(\lambda)$, $P_{a,b}$ et $T_{i,j}(\lambda)$ ne sont pas indiquées dans la notation de ces matrices. Le contexte permet de lever toute ambiguïté.

Exemple 7. Calculer les produits $D_2(3)A$, $AD_2(3)$, $P_{1,2}A$, $AP_{1,2}$, $T_{1,2}(10)A$, $AT_{1,2}(10)$ avec et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

Proposition nº 7 : effet de la multiplication par une matrice d'opérations élémentaires

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $D_a(\lambda)A$ est la matrice A à laquelle on a multiplié la a-ième ligne par λ.
2. $P_{a,b}A$ est la matrice A à laquelle on a échangé la a-ième ligne avec la b-ième ligne.
3. $T_{a,b}(\lambda)A$ est la matrice A à laquelle on a ajouté λ fois la b-ième ligne à la a-ième ligne.
4. $AD_a(\lambda)$ est la matrice A à laquelle on a multiplié la a-ième colonne par λ.
5. $AP_{a,b}$ est la matrice A à laquelle on a échangé la a-ième colonne avec la b-ième colonne.
6. $AT_{a,b}(\lambda)$ est la matrice A à laquelle on a ajouté λ fois la a-ième colonne à la b-ième colonne.

2.2 Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire

Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on dit que le système suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p & = & y_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = & y_n \end{cases}$$

est un **système linéaire** de n équations à p inconnues $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de coefficients $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de second membre $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. On dit que $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est solution du système s'il vérifie les n équations du système. Résoudre un tel système revient à déterminer toutes les solutions. Un système est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. On dit que le système est **homogène** si le second membre est nul.

Remarque 8. Résoudre un système linéaire revient à trouver tous les $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = Y$.

Proposition n° 8 : structure des solutions

Soit un système linéaire $AX = Y$ compatible dont X_P est une solution particulière. Les solutions de ce système sont exactement de la forme $X_P + X_H$ où X_H est solution du système homogène $AX = 0_{p,1}$.

Comment résoudre un système linéaire ? (pivot de Gauss)

On fait des opérations sur les lignes de façon à «échelonner» le système : à chaque ligne, la première inconnue rencontrée doit être plus à droite qu'à la ligne précédente. Une ligne «$0 = 0$» se supprime, une ligne «$0 = 1$» montre que le système est incompatible. Une fois le système échelonné, la première inconnue de chaque ligne est appelée inconnue principale et est exprimé en fonction des inconnues non principales (appelées inconnues secondaires).

Exemple 8. Résoudre $\begin{cases} 2x + 3y + 5z + 2t & = & 3 \\ 4x + 6y + z + 2t & = & 2 \end{cases}$.

3 Matrices carrées

On note 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition n° 9 : des opérations des matrices carrées

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors, $AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad A \times I_n = I_n \times A = A$, $\quad A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$, $\quad A^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition de la puissance d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$. Par convention, $A^0 = I_n$.

Exemple 9. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0_2$. Si $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = 0_2$.

Définition d'un diviseur de zéro, d'une matrice nilpotente

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un **diviseur de zéro** si $A \neq 0_n$ et s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = 0_n$.
Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0_n$, on dit que N est une matrice **nilpotente**.

Définition de la diagonale d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$ est appelée **diagonale** de A.

3.1 Cas particuliers de matrices carrées

Définition des matrices scalaires/diagonales/triangulaires supérieures/triangulaires inférieures

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λI_n est une **matrice scalaire**.
2. On dit que $D = (d_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonale** si ses termes en dehors de la diagonale sont nuls : $\forall (i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2 \qquad i \neq j \implies d_{i,j} = 0$
3. On dit que $T = (t_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si ses coefficients en dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls : $\forall (i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2 \quad i > j \text{ (resp. } i < j) \implies t_{i,j} = 0$

Exemple 10. 0_n, I_n, $2I_n$ sont des matrices scalaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont triangulaires supérieures. Les matrices scalaires commutent avec toutes les autres matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ce sont mêmes les seules matrices à commuter avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

Proposition n° 10 : propriétés des produits de matrices diagonales et triangulaires

1. Si D et D' sont deux matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $D'' = DD'$ est diagonale et $d''_{i,i} = d_{i,i} \times d'_{i,i}$.
2. Si T et T' deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $T'' = TT'$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure). De plus, $t''_{i,i} = t_{i,i} \times t'_{i,i}$

Exemple 11. Si D est une matrice diagonale de diagonale $(d_1, \dots, d_n)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, D^k est une matrice diagonale de diagonale $({d_1}^k, \dots, {d_n}^k)$.

Définition des matrices symétriques et antisymétriques

1. On dit que $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** si $S = S^\top$ *i.e.* pour tout $(i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ si $s_{i,j} = s_{j,i}$.
2. On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** si $A = -A^\top$ *i.e.* pour tout $(i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 12. $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ est symétrique, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 9. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont forcément nuls.

Exemple 13. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, développer $(A+B)^2$ ainsi que $(A-B)(A+B)$

Proposition n° 11 : formule du binôme de Newton et factorisation de $A^p - B^p$

Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $AB = BA$ alors $\quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \quad$ et $\quad A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$

Péril imminent la condition «A et B commutent» n'est pas décorative

Appliquez ces formules sans vérifier que A et B commutent et c'est la chute !

Utilisation du binôme de Newton pour calculer les puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

3.2 Inverse d'une matrice carrée

Définition d'une matrice inversible et de l'inverse d'une matrice carrée

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. Le B est alors unique et on dit que B est l'**inverse** de A et on le note A^{-1}. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration de l'au plus unicité de l'inverse : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que A soit inversible. Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Soit $B' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B'A = AB' = I_n$, montrons que $B = B'$:

$$B = B \times I_n = B \times (A \times B') = (B \times A) \times B' = I_n \times B' = B'$$

Exemples 14.
- I_n est inversible et ${I_n}^{-1} = I_n$, 0_n n'est pas inversible.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A = I_n$, montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède une ligne (ou une colonne) remplie de 0, alors A n'est pas inversible.

Solution des exemples 14 :
- Comme $I_n \times I_n = I_n \times I_n = I_n$, on peut en déduire que I_n est inversible et que ${I_n}^{-1} = I_n$.
  Pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $0_n B = 0_n \neq I_n$, ainsi, 0_n n'est pas inversible.
- En factorisant par A, il vient $A(A^2 - A + I_n) = I_n = (A^2 - A + I_n)I_n$, ainsi A est inversible et $A^{-1} = A^2 - A + I_n$.
- Supposons que la i-ième ligne de A soit nulle. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, posons $C = AB$, alors $c_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = 0$. Ainsi, pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AB \neq I_n$, donc A n'est pas inversible.
  Supposons que la j-ième colonne de A soit nulle. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, posons $C = BA$, alors $c_{j,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{j,k} a_{k,j} = 0$. Ainsi, pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $BA \neq I_n$, donc A n'est pas inversible.

Proposition n° 12 : propriétés de l'inverse

Soient $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$
1. $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $\lambda A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
3. $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
4. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Attention la somme de matrices inversibles n'est pas forcément inversible

I_n et $-I_n$ sont inversibles mais pas leur somme.

Proposition n° 13 : inverse d'une matrice de taille $(2, 2)$

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Démonstration de la proposition n° 13 : Calculons $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$, alors

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} bc-da & 0 \\ 0 & bc-da \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A^2 - (a+d)A = -\det(A)I_2$. À partir de là, distinguons les cas :

- Si $\det(A) \neq 0$, alors $A(A-(a+d)I_2) = (A-(a+d)I_2)A = -\det(A)I_2$, ainsi,

$$A\left(\frac{1}{-\det(A)}(A-(a+d)I_2)\right) = \left(\frac{1}{-\det A}(A-(a+d)I_2)\right)A = I_2$$

  Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}((a+d)I_2 - A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Si A est inversible, Montrons que $\det(A) \neq 0$. Supposons (par l'absurde) que $\det(A) = 0$, alors $A^2-(a+d)A = 0_2$. En multipliant par A^{-1}, il vient $A-(a+d)I_2 = 0$, donc $A = (a+d)I_2$, donc $a = a+d$, $b = 0$, $c = 0$, $d = a+d = 0$, donc $A = 0_2$ donc n'est pas inversible d'où la contradiction, ainsi, $\det(A) = 0$ ■

Théorème n° 1 d'inversibilité d'une matrice par système linéaire

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système linéaire $Y = AX$ admet une et unique solution qui est $X = BY$. Dans ce cas, $A^{-1} = B$.

Démonstration du théorème n° 1 : Supposons que A soit inversible. Soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors

$$Y = AX \iff A^{-1}Y = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_nX = X$$

Ainsi le système admet une unique solution, $X = A^{-1}Y$ de la forme $X = BY$ avec $B = A^{-1}$.

Supposons qu'il existe $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Y = AX$ admette une et unique solution qui est $X = BY$. Alors, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $Y = ABY$ [1] Pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $(AB-I_n)Y = 0_{n,1}$ soit $CY = 0_{n,1}$ avec $C = AB - I_n$. Pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, on obtient que $CE_{j,1} = 0_{n,1}$. Or, cette matrice est égale à la j-ième colonne de C, donc toutes les colonnes de C sont nulles et donc $C = 0_n$ puis $AB = I_n$.

De plus, soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, posons $Y = AX$, alors, par hypothèse, $X = BY$, donc $X = B(AX) = BAX$ donc $(BA-I_n)X = 0_{n,1}$, soit $DX = 0_{n,1}$ avec $D = BA - I_n$, on en déduit que $D = 0_n$ puis $BA = I_n$. On peut en conclure que A est inversible et $A^{-1} = B$. ■

Exemples 15. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse. Étudier l'inversibilité de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution des exemples 15 : Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors :

1. on aimerait simplifier par Y pour en déduire que $I_n = AB$, mais c'est interdit.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

$$
\begin{array}{rl}
& Y = AX \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & -z & = & a \\ 2x & +3y & +z & = & b \\ 2x & +y & & = & c \end{array}\right. \\
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & -z & = & a \\ & -y & +3z & = & -2a+b \\ & -3y & +2z & = & -2a+c \end{array}\right. \\
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rrrcl} x & & +5z & = & -3a+2b \\ & -y & +3z & = & -2a+b \\ & & -7z & = & 4a-3b+c \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3a+2b-5\frac{-4a+3b-c}{7} \\ -y & = & -2a+b-3\frac{-4a+3b-c}{7} \\ z & = & \frac{-4a+3b-c}{7} \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{-a-b+5c}{7} \\ y & = & \frac{2a+2b-3c}{7} \\ z & = & \frac{-4a+3b-c}{7} \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} Y
\end{array}
$$

Donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition nº 14 : inversibilité d'une matrice diagonale

Soit $D = (d_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Alors $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $d_{i,i} \neq 0$. Dans ce cas, D^{-1} est une matrice diagonale de diagonale $({d_{1,1}}^{-1}, {d_{2,2}}^{-1}, \dots, {d_{n,n}}^{-1})$.

Démonstration de la proposition nº 14 : Supposons que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $d_{i,i} \neq 0$. Posons alors Δ la matrice diagonale dont la diagonale est $({d_{1,1}}^{-1}, \dots, {d_{n,n}}^{-1})$. D'après la règle du produit de matrices diagonales, $D\Delta = \Delta D = I_n$, ainsi D est inversible et $D^{-1} = \Delta$. S'il existe $i \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $d_{i,i} = 0$, alors la i-ième ligne est nulle et D n'est pas inversible (voir exemple 14). Ainsi, par contraposée, si D est inversible, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $d_{i,i} \neq 0$. ∎

Proposition nº 15 : inversibilité des matrices d'opérations élémentaires et opérations élémentaires

Soit $(i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, les matrices $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont inversibles.
Les opérations élémentaires sur les matrices conservent l'inversibilité.

Démonstration de la proposition nº 15 : Fixons $(i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

- Notons $A = P_{i,j}$ remarquons que A est la matrice I_n à laquelle on a échangé la i-ième ligne et la j-ième ligne. De plus, $P_{i,j}A$ est la matrice A à laquelle on a échangé la i-ième ligne et la j-ième ligne, ainsi $P_{i,j}A = I_n$ soit $P_{i,j}P_{i,j} = P_{i,j}P_{i,j} = I_n$. Donc $P_{i,j}$ est inversible et ${P_{i,j}}^{-1} = I_n$.
- Par produit de matrices diagonales : $D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) = D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) = I_n$
- En développant le produit et en utilisant la règle du produit de deux matrices élémentaires :

$$T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(-\lambda) = (I_n + \lambda E_{i,j})(I_n - \lambda E_{i,j}) = I_n + \lambda E_{i,j} - \lambda E_{i,j} - \lambda^2 E_{i,j}E_{i,j} = I_n$$

  De même, $T_{i,j}(-\lambda)T_{i,j}(\lambda) = I_n$. Dès lors, $T_{i,j}(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

- Effectuer une opération sur les lignes (resp. colonnes) sur A revient à multiplier A à gauche (resp. à droite) par une matrice d'opération élémentaire qui est inversible (par ce qui précède). Or, le produit de deux matrices inversibles est inversible. ■

Théorème n° 2 d'inversibilité d'une matrice par opérations sur les lignes
Si en effectuant des opérations simultanément sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et de I_n, on transforme A en I_n, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et on a transformé I_n en A^{-1}. Sinon, on obtiendra une ligne remplie de 0 et A n'est pas inversible.

Démonstration du théorème n° 2 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il faut démontrer les trois résultats suivants :

- Il faut montrer qu'en effectuant des opérations sur les lignes de A, on arrive à obtenir soit I_n soit une matrice avec une ligne nulle.
- Que si, par des opérations sur les lignes de A, on obtient I_n, alors A est inversible et que son inverse est obtenu en partant de I_n et en effectuant les mêmes opérations que celles faites sur A.
- Que si, par des opérations sur le lignes de A, on obtient une matrice dont une ligne est nulle, alors A n'est pas inversible.

Les résultats sont classés par ordre décroissant de difficulté :

- Si par des opérations sur le lignes de A, on obtient une matrice, appelé B dont la i-ième ligne est nulle. Alors, si A était inversible, comme les opérations sur les lignes conservent l'inversibilité, B serait inversible ce qui est absurde (voir l'exemple 14).
- Si par des opérations sur les lignes de A, on obtient I_n, on note r le nombre d'opérations élémentaires et P_i la matrice de la i-ième opération élémentaire pour $i \in [\![1\,;r]\!]$. Comme effectuer la i-ième opération élémentaire revient à multiplier à gauche, on obtient $P_rP_{r-1}\dots P_2P_1A = I_n$. Notons $P = P_r\dots P_1$ c'est un produit de matrices inversibles, donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, ainsi en multipliant par P^{-1}, $A = P^{-1}I_n = P^{-1}$, donc A est l'inverse d'une matrice inversible et donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P = P_rP_{r-1}\dots P_2P_1I_n$. Sauf que P_1I_n représente la matrice I_n à laquelle on a effectué l'opération sur les lignes correspondant à P_1 puis $P_2(P_1I_n)$ est la matrice P_1I_n à laquelle on a effectué l'opération sur les lignes correspondant à P_2 etc. Bref, il faut effectuer sur I_n les mêmes opérations que l'on a effectué sur A, ça tombe bien, c'est exactement ce qu'on a dit qu'il fallait faire.
- On va raisonner par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{P}(n)$: «pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une succession d'opérations sur les lignes de A pour obtenir soit I_n soit une matrice avec une ligne nulle». Pour $n = 1$, si $A = (a)$ alors soit $a = 0$ et donc, on a rien à faire, soit $a \neq 0$ dans ce cas, on multiplie la première (et seule ligne) de A par a^{-1} de sorte à obtenir $I_1 = (1)$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\1\leqslant j\leqslant n+1}} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. On va distinguer deux cas :
  - Si la $n+1$-ième colonne n'est pas nulle. Alors il existe $i \in [\![1\,;n+1]\!]$ tel que $a_{i,n+1} \neq 0$, alors quitte à échanger L_i et L_{n+1}, $a_{n+1,n+1} \neq 0$, quitte à multiplier la $n+1$-ième ligne par $\frac{1}{a_{n+1,n+1}}$, $a_{n+1,n+1} = 1$. Quitte à effectuer les opérations, $L_i \leftarrow L_i - a_{i,n+1}L_{n+1}$, on obtient une matrice dont tous les coefficients de la dernière colonne sont nuls sauf à la dernière ligne qui vaut 1.
  - Si la $n+1$-ième colonne est nul. Alors, avec 0 opérations sur les lignes on se ramène dans la même situation avec juste le coefficient à la dernière ligne qui vaut 0 et non 1.

  Notons $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\1\leqslant j\leqslant n+1}}$ la matrice obtenue. Ainsi, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $b_{i,n+1} = 0$ et $b_{n+1,n+1} = 0$ ou $b_{n+1,n+1} = 0$

  Notons $\tilde{B} = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice B sans sa dernière ligne ni sa dernière colonne. Alors, appliquons $\mathscr{P}(n)$ à $\tilde{B}$, soit on peut transformer $\tilde{B}$ en une matrice avec la i-ième ligne nulle soit en I_n.
  - Dans le premier cas, en effectuant ces mêmes opérations sur B on va transformer la i-ième ligne de B en la ligne nulle.
  - Si on peut transformer $\tilde{B}$ à I_n, alors en effectuant ces mêmes opérations sur B, on obtient une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur la diagonale et tous les autres coefficients sont nuls sauf ceux sur la dernière ligne, en effectuant $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{n+1,i}L_i$, on obtient I_n ou une matrice dont la dernière ligne est nulle.

  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

■

Exemple 16. Étudier à nouveau l'inversibilité des matrices de l'exemple 15.

Solution de l'exemple 16 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{-1}{7} L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Proposition n° 16 : inversibilité d'une matrice triangulaire
Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, $t_{i,i} \neq 0$. Alors, T^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure), dont la diagonale est $({t_{1,1}}^{-1}, \dots, {t_{n,n}}^{-1})$.

Exemple 17. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4 Méthodes

Comment calculer les puissances d'une matrice ?

1. Si N est nilpotente, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$, alors pour tout entier $k \geqslant p$, $N^k = N^p N^{k-p} = 0_n$.
2. Si D est diagonale, alors D^k est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de D mis à la puissance k.
3. Décomposer la matrice en $A + B$ si A et B commutent et que vous savez calculer A^k et B^k pour tout k, pour appliquer la formule du binôme. Souvent, A est une matrice scalaire et B une matrice nilpotente.
4. Calculer les premières puissances pour conjecturer une formule puis la montrer par récurrence.
5. Si la matrice $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible, alors $M^p = PD^pP^{-1}$

Comment calculer l'inverse d'une matrice ?

1. Si la matrice est de taille $(2, 2)$ connaître et utiliser seulement la formule pour les matrices de taille $(2, 2)$.
2. Imaginer ce que pourrait être l'inverse de A et le multiplier par A pour voir si cela vaut I_n.
3. Effectuer des opérations simultanément sur les lignes de A et I_n de façon à transformer A en I_n (en échelonnant la matrice colonne par colonne). Si cela est possible, alors A est inversible et en transformant A en I_n, on a transformé I_n en A^{-1}. Si en échelonnant, on obtient une ligne remplie de 0, A n'est pas inversible.
4. Résoudre le système $AX = Y$ pour Y une matrice colonne quelconque sous la forme $X = BY$.
5. Si on a une relation entre les puissances de A factoriser par A en laissant le terme en I_n de côté.