Une suite parabolique

On pose la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{8}(x^2+2x)$, alors pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, de sorte que $\mathbb{R}_+$ est stable par f. Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$, d'après le théorème de l'intervalle stable, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc la suite $(u_n)_n$ est monotone. Posons $g\colon x \mapsto f(x) - x$, alors pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$g(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 6x) = \frac{1}{8}x(x-6)$$

De sorte que $g(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 6$, $g(x) \leqslant 0$ si $x \in [\,0\,;6\,]$ et $g(x) \geqslant 0$ si $x \in [\,6\,;+\infty\,[$. On va donc distinguer les cas :

- Si $u_0 = 6$, alors comme 6 est un point fixe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6$, la suite est constante et donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 6$.
- Si $u_0 \in \,]\,0\,;6\,[$, alors
$$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = g(u_0) \leqslant 0$$
et la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Comme la suite est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers ℓ. Comme $0 \leqslant u_n \leqslant u_0$, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, $0 \leqslant \ell \leqslant u_0$. Or, f est continue en ℓ, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est un point fixe de f, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 6$. Or $\ell \leqslant u_0 < 6$ donc $\ell \neq 6$ donc nécessairement $\ell = 0$, ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Si $u_0 > 6$. Alors,
$$u_1 - u_0 = f(u_1) - u_0 = g(u_0) \geqslant 0$$
Ainsi, $(u_n)_n$ est croissante. Supposons que $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$ et que les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, $\ell \geqslant u_0$, or f est continue en ℓ, donc d'après le théorème du point fixe, $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 6$ donc $0 \geqslant u_0$ ou $6 \geqslant u_0$. Les deux cas étant absurdes, on en déduit que $(u_n)_n$ diverge, comme elle est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Une suite en escargot à savoir traiter vite

1. Soit $y \in f(\mathbb{R}_+)$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = f(x) = \frac{1}{1+x}$. Remarquons alors que $y \geqslant 0$ ainsi $y \in \mathbb{R}_+$. Dès lors, $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par f.
2. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, $\ell \geqslant 0$. Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc en $\ell \in \mathbb{R}_+$, d'après le théorème du point fixe, $f(\ell) = \ell$. ainsi, $\frac{1}{1+\ell} = \ell$ donc $1 = \ell(1+\ell)$. soit $\ell^2 + \ell - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $5 > 0$, ainsi $\ell = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\ell \geqslant 0$, on en déduit que $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Dès lors, si $(u_n)_n$ converge, nécessairement $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3. Voir figure 1
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «$u_{2n} \in [\,0\,;\ell\,]$ et $u_{2n+1} \in [\,\ell\,;1\,]$».
   - Pour $n = 0$, on a $0 \leqslant u_0 \leqslant \ell$ par hypothèse, en appliquant la fonction f qui est décroissante, on obtient $f(\ell) \leqslant f(u_0) \leqslant f(0)$, donc $\ell \leqslant u_1 \leqslant 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Alors $\ell \leqslant u_{2n+1} \leqslant 1$ comme f est décroissante,
   $$f(1) \leqslant f(u_{2n+1}) \leqslant f(\ell)$$
   donc $\frac{1}{2} \leqslant u_{2n+2} \leqslant \ell$. Ainsi, $0 \leqslant u_{2n+2} \leqslant \ell$. Encore une fois, f est décroissante,
   $$f(\ell) \leqslant f(u_{2n+2}) \leqslant f(0)$$
   Donc $\ell \leqslant u_{2n+3} \leqslant 1$. Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [\,0\,;\ell\,]$ et $u_{2n+1} \in [\,\ell\,;1\,]$.

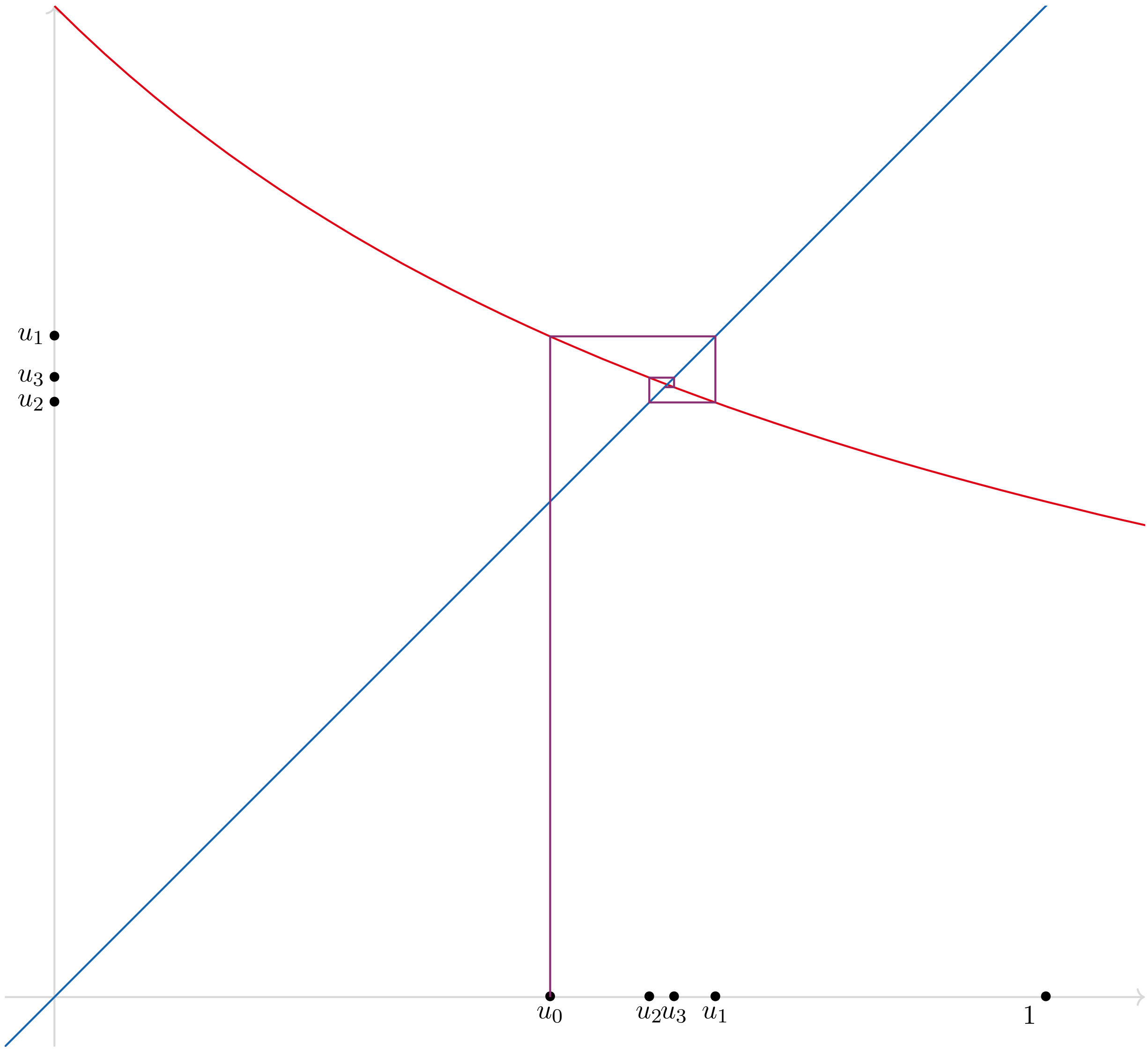

Figure 1 – Tracé des premiers points de la suite, on constate que $u_2 \geqslant u_0$ et que $u_3 \leqslant u_1$. Vous voyez l'escargot ?

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(f(x)) - x = \frac{1}{1+f(x)} - x = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} - x = \frac{1+x}{1+x+1} - x = \frac{1+x-x(2+x)}{2+x} = \frac{-x^2-x+1}{2+x}$$

   En utilisant le signe d'un trinome du second degré, on obtient ainsi :
   - Si $x > \ell$, $f(f(x)) - x < 0$
   - Si $x \in [\,0\,;\ell\,[$, $f(f(x)) - x > 0$
   - Si $x = \ell$, $f(f(x)) - \ell = 0$

6. Posons $g = f \circ f$, alors g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (par composée de fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}_+$). Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{2(n+2)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(v_n)$$

   Comme g est croissante et que $(v_n)_n$ est une suite définie par récurrence grâce à la fonction g, on en déduit que $(v_n)_n$ est monotone. De plus, comme $v_0 = u_0 \in [\,0\,;\ell\,]$ en utilisant la question 5, $v_1 - v_0 = g(v_0) - v_0 \geqslant 0$, on en déduit que $(v_n)_n$ est une suite croissante.
   De même, remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = g(v_n)$$

Comme g est croissante et que $(w_n)_n$ est une suite définie par récurrence grâce à la fonction g, on en déduit que $(w_n)_n$ est monotone. De plus, comme $w_0 = u_1 \in [\,\ell\,;1\,]$ en utilisant la question 5, $w_1 - w_0 = g(w_0) - w_0 \leqslant 0$, on en déduit que $(w_n)_n$ est une suite décroissante.

7. La suite $(v_n)_n$ est croissante et majorée par ℓ. D'après le théorème de la limite monotone, $(v_n)_n$ converge vers une limite ℓ'. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant \ell$, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, on obtient $0 \leqslant \ell' \leqslant \ell$. Comme, g est continue en ℓ', le théorème du point fixe assure que $g(\ell') = \ell'$. Or, $g(\ell') = \ell'$ ssi $g(\ell') - \ell' = 0$ ssi $\ell' = \ell$ (en utilisant la question 5). Ainsi, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

   La suite $(w_n)_n$ est décroissante et minorée par ℓ. D'après le théorème de la limite monotone, $(w_n)_n$ converge vers une limite ℓ''. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leqslant w_n$, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, on obtient $\ell \leqslant \ell''$. Comme, g est continue en ℓ'', $g(\ell'') = \ell''$. Or, $g(\ell'') = \ell''$ ssi $g(\ell'') - \ell'' = 0$ ssi $\ell'' = \ell$ (en utilisant la question 5). Ainsi, $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

   Ainsi, $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite ℓ, d'après le théorème du cours,

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$