DS4

11 janvier 2025

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les problèmes/exercices dans l'ordre qui vous plaît.

Des polynhommes et des polynfemmes (pour l'inclusivité)

On considère $P = 2X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 4X^3 - 22X^2 - 2X - 12$

1. Quel est le degré de P et son coefficient dominant ?
2. On note s (resp. p) la somme (resp. le produit) des six racines complexes de P (éventuellement plusieurs des racines peuvent être égales), donner la valeur de s et de p.
3. Démontrer que i est racine de P et déterminer sa multiplicité.
4. Que pouvez-vous en déduire sur $-\mathrm{i}$?
5. Déterminer alors l'ensemble des racines complexes de P et leur multiplicité.
6. Donner la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de P puis dans $\mathbb{R}[X]$.

On pose $B = X^3 - X^2 - 4X + 4$

7. Déterminer les racines de B (on cherchera des racines évidentes).
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^n$ par B.
9. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$ sur $[\,4\,;+\infty\,[$.

Les suites récurrentes reviennent ! (d'où leur nom)

Pour $x \in [\,0\,;1\,]$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Déterminer les variations de f, montrer que $[\,0\,;1\,]$ est stable par f
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$.
3. En déduire la convergence et l'éventuelle limite de $(u_n)_n$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$
8. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$
9. Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$.

Les matrices stochastiques (fidèles à leurs lignes)

Les matrices stochastiques sont des matrices carrées dont les coefficients sont tous positifs ou nuls, et la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Elles sont souvent utilisées en probabilité, et le calcul de leurs puissances successives est souvent utile. Soit $p \in \,]0\,;1[$ représentant une probabilité. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Des suites pour des puissances

1. Vérifier que A est stochastique.
2. Calculer A^2. Que vaut A^0 ?
3. En utilisant la relation $A^{n+1} = A \times A^n$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe 3 réels a_n, b_n et c_n tels que :
$$A^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En particulier, montrer que $c_{n+1} = pc_n + (1-p)$. Préciser également les valeurs $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$.
4. Déterminer une expression de c_n en fonction de n.
5. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :
$$\forall \in \mathbb{N} \qquad a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = 0$$
6. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

On pose la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MU = U\}$

7. Prouver que si M et N sont deux éléments de $\mathcal{E}$, alors MN l'est également.
On dit que $\mathcal{E}$ est stable par produit matriciel
8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \mathcal{E}$ puis que $b_n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n$.

Ainsi, en remplaçant a_n, b_n et c_n par les expressions trouvées, on obtient l'expression explicite de A^n.

Des calculs matriciels

On définit les matrices $B = \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = B + C$.

9. On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
10. Calculer la matrice $D = P^{-1}BP$
11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner, sans justification, la valeur de D^n.
12. À l'aide des résultats précédents, donner sans justification une expression de B^n en fonction de D^n, P et P^{-1} puis calculer explicitement B^n.
13. Calculer C^2. En déduire une expression de A^n en fonction des puissances des matrices B et C puis trouver à nouveau l'expression explicite de A^n.

Étude théorique des matrices stochastiques

On se fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$, et on travaille dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note maintenant $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne constitué que de 1, ainsi que $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid MU = U\}$.

14. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs, démontrer que A est stochastique ssi $A \in \mathcal{E}$.
15. Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique.