DS5

1 février 2025

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront soulignés ou encadrés. Vous pouvez faire les problèmes dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

La matrice A : un triangle dans un carré

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer si A est inversible, et calculer, le cas échéant, A^{-1}.
2. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ et T une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont nuls tel que $A = aI_3 + T$
3. Calculer T^3.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

On n'en finit jamais avec les suites

On définit l'intervalle $I = [\,\mathrm{e}\,; +\infty\,[$ et on pose pour $x \in I$, $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

1. Justifier que f est dérivable sur I, puis en déduire que $I = [\,e\,; +\infty\,[$ est un intervalle stable par f.
2. Montrer, que pour tout $x \in I$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1/4$.
3. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que f est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne sur I.

On pose $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, ainsi, par stabilité de I par f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
5. En déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

f_n : la fonction qui ne manque pas de puissance à la racine

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $f_n \colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n + 9x^2 - 4 \end{cases}$

Existence, unicité et approximation d'une solution à l'équation $f_n(x) = 0$

1. Écrire une fonction Python `fn(x:float,n:int)->float` qui pour x un réel positif et n un entier naturel non nul renvoie $f_n(x)$.
2. Énoncer précisément le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction $g\colon [\,a\,; b\,] \to \mathbb{R}$.
3. Démontrer qu'il existe $c \in [\,0\,; 2/3\,]$ tel que $f_n(c) = 0$.
4. On souhaite écrire un algorithme de Dichotomie qui à un n donné et un $\varepsilon > 0$ donné renvoie une approximation de c à ε près, recopiez et complétez le code suivant :

```
def Dichotomie(eps:float,n:int)->float:
    a =          #a tel que f_n(a)<0
    b =          #b tel que f_n(b)>0
    while
        c =
        if

        else

    return
```

5. Démontrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(c) = 0$.

Comme ce c dépend du n choisi, on l'appelle à partir de maintenant x_n, ainsi, $f_n(x_n) = 0$

6. Donner la valeur explicite de x_1 et de x_2.

Étude d'une suite

Ainsi, on a définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. Sans justification, indiquer si la suite $(x_n)_n$ est une suite définie explicitement, implicitement ou par récurrence.
8. Démontrer que pour tout $x \in]\,0\,;1\,[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
9. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
10. Soit $g\colon I \to \mathbb{R}$. Donner la définition de «g est une fonction croissante sur I».
11. Soit $g\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $(x, x') \in I^2$, on suppose que $g(x) < g(x')$, en raisonnant par l'absurde, démontrer que $x < x'$.
12. À l'aide des questions précédente, montrer que la suite $(x_n)_n$ est croissante.
13. En déduire que la suite $(x_n)_n$ converge.
14. Déterminer la limite de $(x_n)_n$.

Étude des dérivées successives

15. On pose $h = \dfrac{1}{f_1}\colon x \mapsto \dfrac{1}{9x^2 + x - 4}$, justifier rapidement que est h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$.
16. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $h^{(n)}\colon x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(9x^2 + x - 4)^{n+1}}$, on donnera une formule reliant P_{n+1} à P_n.
17. Rappeler la formule de Leibniz (hypothèses et conclusion), pour deux fonctions $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$.
18. Soit un entier $n \geqslant 2$. En appliquant la formule de Leibniz à $h \times f_1$, déterminer une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.

Les polynômes de la ferme

Cas particulier $\mathbb{R}_2[X]$

1. En déterminant ses racines, factoriser le polynôme $2X^2 + 10X + 12$ comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Donner un exemple de polynôme P de degré 2 tel que 3 et 4 soient racines de P. Que vaut $P(5)$?
   On pourra chercher P sous forme factorisée.
3. En déduire alors un exemple de polynôme Q de degré 2 tel que $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
   On pourra remarquer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $Q = \lambda P$, alors, on on a encore $Q(3) = Q(4) = 0$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on suppose que P a au moins trois racines distinctes, en citant un résultat de cours, que peut-on en déduire sur P ?
5. Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
   On pourra prendre deux tels polynômes Q et R et étudier les racines de $Q - R$.

On note maintenant L_1 l'unique polynôme de degré 2 tel que $L_1(3) = L_1(4) = 0$ et $L_1(5) = 1$.

6. Donner alors, sans preuve et sous forme factorisée :
   - L_2 le seul polynôme de degré 2 tel que $L_2(3) = L_2(5) = 0$ et $L_2(4) = 1$
   - L_3 le seul polynôme de degré 2 tel que $L_3(4) = L_3(5) = 0$ et $L_3(3) = 1$.
7. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $P = P(5)L_1 + P(4)L_2 + P(3)L_3$.
   On pourra considérer les racines de la différence entre ces deux polynômes.

Cas général

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un $n+1$-uplet de réels deux à deux distincts. Fixons $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$.
On pose $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$

8. Déterminer le degré de L_i.

9. Démontrer que pour tout $j \in [\![0 ; n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

   On rappelle que $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad i = j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$

10. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, en utilisant les racines de $P - \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$, démontrer que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$.

Majoration de l'erreur

11. Soit $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[\,a\,;b\,]$, on suppose que f s'annule au moins $n+2$ fois, montrer que f' s'annule au moins $n+1$ fois.
12. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ s'annulant $n+2$ fois, montrer que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[\,a\,;b\,]$.

Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$, on note $P = \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)L_k$, avec, pour tout $i \in [\![0 ; n]\!]$, $L_i = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \dfrac{X - x_k}{x_i - x_k}$. On cherche à montrer que

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \quad \exists c \in [\,a\,;b\,] \qquad f(x) - P(x) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x - x_k)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

13. Démontrer que le résultat est vrai, si $x = x_i$ pour un certain $i \in [\![0 ; n]\!]$.
14. On considère $x \in [\,a\,;b\,] \backslash \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, on pose

$$Q = \prod_{k=0}^{n}(X - x_k) \qquad \text{et} \qquad W\colon t \mapsto f(t) - P(t) - \frac{Q(t)}{Q(x)}(f(x) - P(x))$$

    En utilisant la fonction W en déduire le résultat voulu.

15. Justifier que $f^{(n+1)}$ est une fonction bornée sur $[\,a\,;b\,]$.
16. On note alors $M = \sup\{|f^{(n+1)}(t)| \text{ tel que } t \in [\,a\,;b\,]\}$. Déduire de ce qui précède que

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{|Q(x)|}{(n+1)!} M$$