

Révision 1 (fonctions)

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes en précisant les ensembles de dérivabilité :

1. $x \mapsto \cos^3(x)$

2. $x \mapsto \exp(\sin(x))$

3. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$

4. $x \mapsto \ln(\cos(x))$

5. $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$

(avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$)

2. Complétez : la fonction arccos est une bijection de _____ vers _____, elle est dérivable sur _____ et pour tout $x \in$ _____, $\arccos'(x) =$ _____.

3. Résoudre l'équation différentielle $y' + \sin(x)y = 0$
Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions.

4. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions.

5. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = 0$.
Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions.

6. Après avoir justifier la dérivabilité, dériver la fonction $f: x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$
En déduire la valeur de $\arctan(x) + \arctan(1/x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}^*$.

7. Calculer $\int_3^4 \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx$

8. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx$

9. Calculer $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$ en posant $t = \sqrt{e^x - 1}$

10. Calculer $\int_1^2 \sin(\ln(x)) dx$ en posant $t = \ln(x)$

11. Calculer $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ en posant $t = \sqrt{x}$.

12. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

13. Calculer, en justifiant, les dérivées n -ièmes de $x \mapsto \frac{1}{a-x}$ où $a \in \mathbb{R}$ est un réel fixé.

14. Soit $f: [3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et définir avec les quantificateurs, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$. Puis nier cette définition avec des quantificateurs.

Pour les cinq questions suivantes, on pose $f: x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos(x)$.

15. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que f est une fonction k -lipschitzienne avec une certaine constante k à déterminer.

16. Démontrer que f admet au moins un point fixe. Y a-t-il unicité ?

17. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(u_n)_n$ par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Que peut-on en déduire pour cette suite $(u_n)_n$?

18. En notant ℓ la limite de $(u_n)_n$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

19. Déterminer deux algorithmes Python calculant une approximation de ℓ à ε près où $\varepsilon > 0$. La première utilisera la dichotomie, la seconde l'inégalité démontrée à la question 18. On pourra utiliser la fonction Python `np.cos` pour calculer le cosinus à la condition d'avoir importé `numpy` avec l'alias `np`.