Warning!

*«Les maths c'est comme la conduite : sans avertisseurs c'est le crash !»**

Loïc Devilliers

16 février 2025

Dans ce petit texte [1], nous revenons sur quelques points qui nécessitent des précautions. C'est comme en voiture, avant de prendre un virage, on vérifie l'angle mort et on met un clignotant [2]. Et si y a un vrai danger, on allume les warnings [3] !

Figure 1 – Sans warnings, on va droit dans le mur !

Table des matières

*Proverbe chinois du 5ième siècle, enfin il paraît...

1. Amis lecteurs, il est possible que vous y trouviez du second degré mais sans discriminant bien sûr.
2. Doit-on en conclure que les profs de maths devraient se recycler en moniteurs d'auto-école ?
3. Avez-vous vérifié qu'ils fonctionnaient ?

1 La logique

1.1 Condition nécessaire, condition suffisante, condition nécessaire et suffisante

Si f et g sont continues sur I, alors fg est continue sur I. Si fg est continue sur I que pouvez-vous en déduire ? Rien, trois fois rien ! Parce qu'une implication peut-être vraie sans que sa réciproque le soit. Néanmoins, par contraposée, si fg n'est pas continue sur I, on peut en déduire que l'une des deux fonctions n'est pas continue sur I. Soit f une fonction, alors si $x = x'$, il est assez trivial que $f(x) = f(x')$. Comme les fonctions ne sont pas toutes injectives, la réciproque est fausse.

Les systèmes linéaires se résolvent toujours par équivalence (donc sans «*donc*» dans votre système).

1.2 Quantificateurs en ordre («law and order» comme disait l'autre)

Soit $f\colon E \to F$, dire que f est surjective s'écrit «$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$». Par contre, ceci n'a aucun sens : «$\exists x \in E \quad \forall y \in F \quad y = f(x)$».

1.3 Vérifier les hypothèses

Un théorème a souvent des hypothèses pour arriver à une conclusion. Vous connaissez les dites-hypothèses [4]. Il est donc logique que vous les vérifiez pour aboutir à la dite-conclusion.

1.4 Les récurrences (les erreurs y sont malheureusement trop récurrentes)

On définit proprement une hypothèse de récurrence. Il ne doit pas y avoir de «$\forall n \in \mathbb{N}$» dans la définition de $\mathscr{P}(n)$. Ensuite vous vérifiez l'initialisation et l'hérédité. Attention, si vous avez besoin de $\mathscr{P}(n)$ et de $\mathscr{P}(n+1)$ pour montrer $\mathscr{P}(n+2)$, alors vous faites une récurrence double. Dans ce cas, il faut une double initialisation. Si vous avez besoin que ça soit vrai pour tous ceux d'avant, c'est donc une récurrence forte qu'il faut faire.

1.5 Les symboles d'appartenance (pas à une secte)

Écrire «$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$» est juste «$\mathbb{Z} \in \mathbb{R}$» ne l'est pas. Vous ne voyez pas la différence ? Alors, changez de lunettes. De même, «$\in$» et «$=$» ne doivent pas être inversées dans des calculs. Certains pour montrer que $E = F$, montrent que pour tout $x \in E$, $x \in F$, les vrais savent qu'il faut procéder par double inclusion.

4. Il paraît qu'il faut connaître son cours pour ça.

2 La division par 0

Une rumeur prétend que cela fait plus mal qu'un seppuku [5].

Diviser a par b demande à ce que b soit non nul :

- Soit c'est trivial (genre $b = 2$), dans ce cas, c'est bon.
- Soit ça ne l'est pas, soit vous montrez qu'effectivement $b \neq 0$, soit vous faites autre chose si $b = 0$ est possible : éventuellement une disjonction de cas.

De la même manière, si A, B, C sont trois matrices avec $AB = AC$, vous pouvez en déduire que $B = C$ si A est inversible en multipliant par A^{-1}.

Figure 2 – Merci à «*plus Covided*» pour la session des droits sur l'image.

3 Les nombres

On aurait pu parler de la division par zéro dans cette section. Mais comme c'est la reine des conneries, elle mérite une section à elle toute seule.

3.1 Les ensembles de définitions des fonctions

Avant de passer x à la racine carré (respectivement au logarithme), vous vous assurez que $x \geqslant 0$ (respectivement $x > 0$), arcsin, arccos sont définies sur $[-1\,;1]$, tan sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 0$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha < 0$. De même, si vous parlez de $f'(x)$ c'est que savez que f est une fonction dérivable en x.

3.2 Majorant/Minorant/Borne supérieure/Borne inférieure/Maximum/Minimum

Maîtriser ces objets : une condition nécessaire (mais non suffisante, hélas !) pour majorer les concours.

Soit $X \subset \mathbb{R}$.

- Montrer que X admet un majorant (resp. minorant), revient à exhiber [6] $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, $x \leqslant M$. (resp. $x \geqslant M$).
- Montrer que X admet une borne supérieure (resp. inférieure), revient à montrer que X est non vide et majorée (resp. minorée).
- Montrer que X admet un maximum (resp. minimum), revient à montrer que X admet un majorant (resp. un minorant) qui est un élément de X (la borne supérieure est un bon candidat).
- Si X est fini non vide, alors, X admet un maximum et un minimum.
- Si $X \subset \mathbb{Z}$ non vide, alors X admet un maximum (resp. minimum) ssi il est majoré (resp. minoré)
- Si $X \subset \mathbb{N}$ non vide, alors X admet forcément un minimum.

5. N'ayant pas essayé, je ne peux pas vous dire.
6. Exhiber du X, really ?

3.3 Les équivalents

On ne fait pas de somme d'équivalents, ni d'équivalent à 0. Sinon direction le précipice.

3.4 Les inégalités

Si $a \leqslant b$ ON NE PEUT PAS en déduire que $ac \leqslant bc$ si $c < 0$. La valeur absolue et la fonction carré ne sont pas croissantes, ainsi, si $a \leqslant b$, alors **on n'a pas forcément** $a^2 \leqslant b^2$ ni $|a+c| \leqslant |b+c|$.

3.5 Les sommes (il n'y a que les bêtes de somme pour écrire une somme bête)

Les uns pensent que dans la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ contient n termes, les autres ont appris à compter.

3.6 La puissance tu l'as en toi

Soit $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, il y a plusieurs définitions de x^α suivant les cas :

- Si $x > 0$, $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.
- Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $x^\alpha = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ fois}}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $x^\alpha = \dfrac{1}{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{-\alpha \text{ fois}}}$

Évidemment, toutes ces définitions coïncident si (x, α) rentre dans plusieurs catégories.

Lorsque $x > 0$, on vous conseille d'écrire $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$ et d'exploiter vos connaissances sur l'exponentielle et le logarithme. Cela sert pour faire des développements limité et donc de trouver que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}$. Malheureusement, une mauvaise compréhension des limites des suites [7], permet à certains candidats de penser que cette limite est 1.

4 L'homogénéité

«*Comme seul* 0 *est à la fois un vecteur et un nombre, si vous ne respectez pas l'homogénéité, c'est* 0.» [8]

Il faut faire attention aux objets que vous utilisez. Si vous écrivez $A = BC$ avec A, B et C trois matrices, c'est que vous avez vérifiée (au moins dans votre tête) que les tailles des matrices sont cohérentes. Si A contient plus de deux lignes ou deux colonnes, écrire «$A = a_{i,j}$» est une horreur car $a_{i,j}$ est un nombre et A une matrice.

Si f et g sont deux fonctions à valeurs réelles, alors $f = g$ a un sens, $f(x) = g$ n'en a pas. Dans la même veine [9], $(u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ est une suite numérique, tandis que u_n est un nombre.

De même, un vecteur n'est pas un nombre.

Certains élèves pensent que $\cos(x)$ est continue, votre professeur est persuadé du contraire...

Comme X est un polynôme de degré 1, il ne peut pas être égal à 1 (polynôme constant de degré 0), donc écrire «posons $X = 1$» n'a pas de sens. De même résoudre l'équation $X^2 - 1 = 0$ est impossible, $X^2 - 1$ n'est pas le polynôme nul. Si vous cherchez des racines de ce polynôme, alors c'est l'équation $x^2 - 1 = 0$ que vous cherchez à résoudre.

---

7. À ce propos, un jour, Dupond affirma que $1 + 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et que comme $1^n = 1$, la suite tend vers 1, Dupont lui répondit alors que comme $1 + 1/n > 1$ et que $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ pour $q > 1$, donc la suite tend vers $+\infty$. Inutile de vous dire que Dupond et Dupont ont fait tintin pour les concours.
8. Proverbe d'un mathématicien babylonien qui ne respectait même pas l'homogénéité dans sa propre citation. Notez que ce mathématicien a écrit cette citation avant même l'invention du zéro et des vecteurs. Respect !
9. Autant parler de veine dans ce document, car les sorties de route sont souvent sanglantes.

5 Diantre, un peu de tenue !

Le français et le langage précis sont importants contrairement à une légende persistante.

5.1 Un/Une/Le/La (articles indéfinis/définis quand la grand-mère était encore enseignée)

Si $X = [\,0\,;3\,[$, alors 5 est UN majorant de X et non LE majorant ; il n'est pas unique, 3 et π sont également des majorants. En revanche, 3 est LA borne supérieure de X.

Dans le même ordre d'idée, si F est un sous-espace vectoriel de E, on parle d'UN supplémentaire de F (s'il existe [10]) mais DU supplémentaire orthogonal (s'il existe [11]).

5.2 C'est qui qui ? (il est beau le chien-chien à sa mémé)

«*Il lui a donné le truc ! Tu piges ?*», Ben non β ! On pige que dalle !

Si vous parlez d'un objet non défini ou non fixé dans le sujet c'est que vous avez introduit cet objet. Par exemple, si le sujet introduit la fonction $f\colon x \mapsto x^3\cos(x)$. Alors, vous pouvez sans problème, disserter sur $f(1)$. Tandis qu'écrire «$f(x) = \ldots$» est incorrect, pour quel x écrivez-vous cette égalité ? Mystère. Le sujet n'a pas défini x. Comment ça «*Mais si, y a un x dans la définition de f*» ? C'est un x muet, tout comme $\sum_{k=1}^{n} 2^k$ ne définit pas k. Dire «*c'est dérivable*» n'a aucun sens, il faut dire «*f est dérivable en* 3» ou «*f est dérivable sur* $]\,0\,;1\,[$». Ne pas dire «*ça converge*», préciser quelle suite et quelle limite.

5.3 Achevez vos calculs (non pas avec une hache !)

Laisser traîner des $\exp(0)$, $\ln(1)$, $\sqrt{4}$, $\cos(0)$ à la fin d'un calcul n'est pas mathématiquement faux, mais c'est une preuve d'impolitesse envers les gens qui vous lisent.

6 L'algèbre

Le déterminant n'est pas linéaire [12] : en général $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ et $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$. Une famille de trois vecteurs (e_1, e_2, e_3) dont les vecteurs sont 2 à 2 non colinéaires n'est pas forcément libre. Si $f\colon E \to F$ est linéaire et injective avec E et F de dimension finie, on ne peut pas dire que f est bijective. En revanche, c'est le cas si $\dim(E) = \dim(F)$. Il n'est pas inutile de savoir que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ et que $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$ et non n. si $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors le théorème du rang s'écrit $\dim(\operatorname{Ker}(A)) + \operatorname{rg}(A) = n$ (avec n le nombre de colonnes). Une famille libre n'est pas forcément une base, par contre c'est le cas si son cardinal vaut la dimension de l'espace vectoriel en question.

7 Spécial Spé

- Pour écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \ldots$ ou $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \ldots$, vous avez D'ABORD montré que la série/l'intégrale converge.
- Chaque année, lors des concours, des milliers de candidats s'unissent pour raconter une bonne blague aux correcteurs en écrivant «*comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la série $\sum u_n$ converge*». Ces derniers rigolent effectivement, puis font tendre, en série, la note des clowns vers 0.
- Ces mêmes candidats aiment bien en raconter une autre : «*Puisque χ_M n'est pas scindé à racines simples, la matrice M n'est pas diagonalisable*» [13].
- Une dernière blague pour la route verglacée : «*$\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence qui vaut $R > 0$, donc $\sum a_n x^n$ converge normalement/uniformément sur* $]\,-R\,;R\,[$».

10. C'est le cas si E est de dimension finie.
11. C'est le cas si F est de dimension finie.
12. Il y a bien une propriété mêlant déterminant et linéarité. Mais les lecteurs avisés que vous êtes savez très bien de quelle propriété je parle. Non ? Ben allez réviser.
13. Il paraît que chaque année, au moins un correcteur frôle l'asphyxie en riant à cette blague.