

Révision 1 (fonctions)

- (a) $x \mapsto \cos^3(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} (puissance entière naturelle d'une fonction dérivable sur \mathbb{R}) de dérivée $x \mapsto -3\sin(x)\cos^2(x)$.
- (b) Par composition de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , $x \mapsto \exp(\sin(x))$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \cos(x)e^{\sin(x)}$.
- (c) $\ln:]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et $x \mapsto x^{-1/2}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Par composition, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \frac{-1}{2} \times \frac{1}{x} \times \ln^{-3/2}(x)$.

(d) Notons

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$$

Alors $\cos: D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable. Par composition $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est dérivable sur D de dérivée $x \mapsto \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

(e) Distinguons les cas :

- Si $c = 0$, alors $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction affine de dérivée $x \mapsto \frac{a}{d}$.
- Si $c \neq 0$, $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\det(M)}{(cx+d)^2}$$

En notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- La fonction arccos est une bijection de $[-1; 1]$ vers $[0; \pi]$, elle est dérivable sur $] -1; 1 [$ et pour tout $x \in] -1; 1 [$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- L'ensemble des solutions est de la forme :

$$\{x \mapsto Ce^{\cos(x)} \mid C \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(x \mapsto e^{\cos(x)}) = \text{vect}(\exp \circ \cos)$$

Ainsi, $(\exp \circ \cos)$ est une famille génératrice de l'ensemble des solutions. Comme il s'agit d'une famille d'un seul vecteur et que ce vecteur est non nul $(\exp \circ \cos)$ est une famille libre. Par conséquent, $(\exp \circ \cos)$ est une base de l'ensemble des solutions.

- L'équation caractéristique de cette équation du second degré à coefficients constants et homogène est $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$. Ainsi, l'ensemble des solutions est de la forme :

$$\{x \mapsto (Ax+B)e^{-2x} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\} = \{x \mapsto Axe^{-2x} + Be^{-2x} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(f_1, f_2)$$

Avec $f_1: x \mapsto xe^{-2x}$ et $f_2: x \mapsto e^{-2x}$. La famille (f_1, f_2) est donc une famille génératrice de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle. Montrons que (f_1, f_2) est une famille libre¹. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. supposons $af_1 + bf_2 = 0$ (fonction nulle), alors, en particulier, $af_1(0) + bf_2(0) = 0$, d'où $b = 0$, pour $x = 1$, on obtient $a1e^2 = 0$ soit $a = 0$. Dès lors (f_1, f_2) est libre donc est une base de l'ensemble des solutions.

- L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire du second degré à coefficients constants et homogène est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Le discriminant vaut $4 - 4 \times 5 = -16 = (4i)^2$. Ainsi, les racines de cette équation caractéristique sont $\frac{2+4i}{2} = 1+2i$ et $\frac{2-4i}{2} = 1-2i$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\begin{aligned} \{x \mapsto e^x(A \cos(2x) + B \sin(2x)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} &= \{x \mapsto Ae^x \cos(2x) + Be^x \sin(2x) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{vect}(f_1, f_2) \quad \text{avec} \quad f_1: x \mapsto e^x \cos(2x) \quad \text{et} \quad f_2: x \mapsto e^x \sin(2x) \end{aligned}$$

La famille (f_1, f_2) est donc une famille génératrice de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle. Montrons que (f_1, f_2) forme une famille libre. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons $af_1 + bf_2 = 0$ (fonction nulle), alors, en particulier, $af_1(0) + bf_2(0) = 0$, d'où $a = 0$, pour $x = \pi/4$, on obtient $be^{\pi/4} = 0$ soit $b = 0$. Dès lors (f_1, f_2) est libre donc est une base de l'ensemble des solutions.

1. Ne pas dire que f_1 est colinéaire à f_2 , en effet le x n'est pas une constante.

6. La fonction $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur \mathbb{R}^* à valeurs dans \mathbb{R} et \arctan est dérivable sur \mathbb{R} . Ainsi, par composée, $x \mapsto \arctan(1/x)$ est dérivable sur \mathbb{R}^* . Par somme, f est dérivable sur \mathbb{R}^* et

$$f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$$

Ainsi, la dérivée de f est nulle sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* . Dès lors, f est constante sur \mathbb{R}_+^* et $f(1) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$. La dérivée de f est aussi nulle sur l'intervalle \mathbb{R}_-^* . Dès lors, f est constante sur \mathbb{R}_-^* et par imparité de \arctan , $f(-1) = -\pi/4 - \pi/4 = -\pi/2$. Ainsi, pour tout $x < 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\pi/2$.

7. $(X+2)(X+3)$ est un polynôme scindé à racines simples, d'après le cours, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{1}{(X+2)(X+3)} = \frac{A}{X+2} + \frac{B}{X+3}$$

En multipliant par $X+2$ puis en remplaçant X par -2 , on obtient $A = 1$. En multipliant par $X+3$ puis en remplaçant X par -3 , on obtient $B = -1$. Ainsi :

$$\int_3^4 \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx = \int_3^4 \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} dx = [\ln(|x+2|) - \ln(|x+3|)]_3^4 = \ln(6) - \ln(7) - \ln(5) + \ln(6) = \ln\left(\frac{36}{35}\right)$$

8. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\arctan(\sqrt{2}) - \arctan(1/\sqrt{2})) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 \arctan(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2} \right)$

9. On pose $t = \sqrt{e^x - 1}$, alors $e^x = t^2 + 1$, soit $x = \ln(t^2 + 1)$, en dérivant, on obtient $dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt$. Ainsi :

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int_{\sqrt{e^2 - 1}}^{\sqrt{e^3 - 1}} \frac{1}{t} \times \frac{2t}{t^2 + 1} dt = [2 \arctan(t)]_{\sqrt{e^2 - 1}}^{\sqrt{e^3 - 1}} = 2 \arctan(\sqrt{e^3 - 1}) - 2 \arctan(\sqrt{e^2 - 1})$$

10. Posons $t = \ln(x)$, alors $x = e^t$ et donc $dx = e^t dt$, ainsi : $\int_1^2 \sin(\ln(x)) dx = \int_0^{\ln(2)} \sin(t) e^t dt$

Pour calculer cette dernière intégrale, on peut faire une double intégration par parties, on peut aussi utiliser le fait que $\sin(t) = \text{Im}(e^{it})$, ainsi,

$$\int_1^2 \sin(\ln(x)) dx = \int_0^{\ln(2)} \text{Im}(e^{it}) e^t dt = \int_0^{\ln(2)} \text{Im}(e^{t(1+i)}) dt = \text{Im} \left(\int_0^{\ln(2)} e^{t(1+i)} dt \right)$$

Calculons donc cette dernière intégrale, avant d'en calculer la partie imaginaire :

$$\int_0^{\ln(2)} e^{t(1+i)} dt = \left[\frac{e^{t(1+i)}}{1+i} \right]_0^{\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)} e^{i \ln(2)} - 1 \right) \frac{1-i}{2} = \frac{i-1}{2} + (\cos(\ln(2)) + i \sin(\ln(2))) (1-i)$$

En prenant la partie imaginaire, de cette intégrale, on trouve que $\int_1^2 \sin(\ln(x)) dx = \frac{1}{2} + \sin(\ln(2)) - \cos(\ln(2))$

11. Posons $t = \sqrt{x}$, alors $x = t^2$ et donc $dx = 2t dt$, ainsi : $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 e^{t^2} 2t dt = [(2t-2)e^{t^2}]_0^1 = 2$

12. On effectue une intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/3} \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)} dx = \left[\underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} \right]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \underbrace{1}_{u'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$$

13. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \frac{1}{a-x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ (inverse d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(n) : \ll f^{(n)} : x \mapsto \frac{n!}{(a-x)^{n+1}} \gg$. Remarquons

que pour $n = 0$, $f^{(0)} = f : x \mapsto \frac{1}{(a-x)^{0+1}}$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors

$f^{(n)} : x \mapsto n!(a-x)^{-n-1}$ se dérive sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ comme une fonction puissance² ainsi, $(f^{(n)})' : x \mapsto n! \times (-1) \times (-n-1)(a-x)^{-n-2}$. ceci montre que $f^{(n+1)} : x \mapsto \frac{(n+1)!}{(a-x)^{(n+1)+1}}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} : x \mapsto \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$.

2. Rappelons $(u^m)' = mu'u^{m-1}$ avec u fonction dérivable ne s'annulant pas et $m \in \mathbb{Z}$.

14. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [3; +\infty[\quad x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
 $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in [3; +\infty[\quad x \geq A \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon$
15. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et donc continue sur \mathbb{R} (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1/3 - 1/3 \sin(x)$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq |1/3| + |-1/3 \sin(x)| = |1/3| + |-1/3| \times |\sin(x)| \leq 2/3$$

Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est $2/3$ -lipschitzienne.

16. Posons $g: x \mapsto f(x) - x$. Remarquons que :

$$g(0) = 1/3 \quad \text{et} \quad g(\pi) = -2\pi/3 - 1/3 \quad \text{ainsi} \quad g(\pi) \leq 0 \leq g(0)$$

De plus, la fonction g est continue sur $[0; \pi]$ (différences de fonctions qui le sont), ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; \pi]$ tel que $g(c) = 0$, dès lors, $f(c) - c = 0$ et c est un point fixe de f .

Soit d un point fixe de f , alors comme f est $2/3$ lipschitzienne, $|f(c) - f(d)| \leq 2|c - d|/3$. Soit $|c - d|/3 \leq 0$, ainsi, $c - d = 0$ et donc $c = d$. Il y a ainsi unicité du point fixe³.

17. D'après le théorème des suites récurrentes par une fonction k -lipschitzienne avec $k < 1$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$.
18. Avec nos notations, on a $\ell = c$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$ ». Pour $n = 0$, $|u_n - \ell| = |u_0 - \ell| \leq |u_0 - \ell| = k^0 |u_0 - \ell|$, de sorte que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k |u_n - \ell| \leq k(k^n |u_0 - \ell|) = k^{n+1} |u_0 - \ell|$$

Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

19. On pose $u_0 = 0$. Comme $\ell \in [0; 4]$, on a $|u_0 - \ell| \leq 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq 4 \times k^n$ avec $k = 2/3$. Donc pour n assez grand, $4 \times k^n \leq \varepsilon$ et donc pour ce n -là, u_n sera une approximation de ℓ à ε près.

```
import numpy as np
```

```
def f(x):
```

```
    return (x + np.cos(x))/3
```

```
def approximation(epsilon):
```

```
    n = 0 #indice de la suite
```

```
    u = 0 #terme d'indice n de la suite
```

```
    while 4*(2/3)**n > epsilon: #tant que la majoration de l'erreur est plus grand que epsilon
```

```
        n = n + 1 #on passe à l'indice d'après
```

```
        u = f(u) #on passe au terme d'après
```

```
    return u #la boucle while s'est arrêté donc u est une approximation de l à epsilon près
```

Le problème est qu'à chaque itération, on calcule une puissance de n ce qui demande $n - 1$ multiplication. À la place, on peut observer que $4 \times (2/3)^n$ est une suite géométrique de raison $2/3$ et donc on peut passer d'un terme à un autre en multipliant seulement par $2/3$:

```
import numpy as np
```

```
def f(x):
```

```
    return (x + np.cos(x))/3
```

```
def approximation(epsilon):
```

```
    u = 0 #terme d'indice n de la suite
```

```
    MajErreur = 4 #majoration initiale de l'erreur
```

```
    while MajErreur > epsilon: #tant que la majoration de l'erreur
```

```
        #est plus grande que epsilon
```

```
        MajErreur = MajErreur*(2/3)
```

```
        u = f(u) #on passe au terme d'après
```

```
    return u #la boucle while s'est arrêté donc u est une approximation
```

```
        #de l à epsilon près
```

3. Dès que la fonction est k -lipschitzienne avec $k < 1$, il y a toujours au plus unicité du point fixe (s'il existe alors il est unique) avec la même preuve *mutatis mutandis*.

Pour trouver le point fixe, on applique la méthode de Dichotomie à la fonction g afin d'approximer un antécédent de 0 à la fonction g :

```
import numpy as np

def g(x):
    return (x + np.cos(x))/3 - x

def Dichotomie(epsilon):
    a = 0 # g(a)>0
    b = 4 # g(b)<0
    while b - a > epsilon:
        c = (b + a)/2
        if g(c)>0: # 0 est entre g(b) et g(c)
            a = c
        else: # 0 est entre g(a) et g(c)
            b = c
    return a
```