

Révision 2 (suites)

- A priori, c'est une forme indéterminée. Mais, c'est une croissance comparée¹ donc $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
 - Montrons que la suite $(b_n)_n$ n'a pas de limite. Supposons que $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Alors, par somme de limites $b_{2n} = 2^{2n} + 2n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, tandis que

$$b_{2n+1} = -2^{2n+1} + 2n + 1 = 2^{2n+1} \left(-1 + \frac{2n+1}{2^{2n+1}} \right)$$

Or, par croissance comparée, $(2n+1)/2^{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, par somme et par produit $b_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$. Mais par extraction d'une suite convergente, on sait que $b_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ donc par unicité de la limite $\ell = +\infty$, de même $b_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ donc par unicité de la limite $\ell = -\infty$. Ainsi, $+\infty = -\infty$ ce qui est absurde. Ainsi, $(b_n)_n$ n'a pas de limite.

- $c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (croissance comparée)
- Par continuité de $\sin$ en 0, $\sin(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \sin(0) = 0$, donc $\sin(1/n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (caractérisation séquentielle de la limite), or, $n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, ainsi, a priori, nous avons une forme indéterminée.

Cependant, la fonction $\sin$ est dérivable en 0, par caractérisation séquentielle de la limite,

$$d_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(0)}{\frac{1}{n} - 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ (suite géométrique de raison 2 avec $2 > 1$).
- La suite $(v_n)_n$ n'a pas de limite. En effet, supposons par l'absurde que si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Par extraction $v_{2n} = 2^{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$, donc $\ell = +\infty$, mais par extraction $v_{2n+1} = -2^{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$, donc $\ell = -\infty$ absurde.
- La suite $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (suite géométrique de raison $3/4$ avec $|3/4| < 1$).
- A priori, c'est une forme indéterminée, pour la lever, on factorise par ce qui nous semble l'emporter :

$$x_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n \left(-1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

Or, $(3/5)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (suite géométrique de raison $3/5$ avec $|3/5| < 1$), par somme et produit de limites², $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$.

- La suite $(z_n)_n$ est géométrique de raison $-\frac{3}{4}e^{i5}$ avec $\left|-\frac{3}{4}e^{i5}\right| = 3/4 < 1$, ainsi $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{21} + (n - 21) \times (-2) = 52 - 2n$ Par somme de termes d'une suite arithmétique :

$$\sum_{k=5}^n u_k = \frac{(u_5 + u_n)}{2} \times (n - 4) = \frac{104 - 10 - 2n}{2} \times (n - 4) = (47 - n)(n - 4)$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{100} \times 2^{n-100} = 2^{n-100}$, de plus, $\sum_{k=10}^n u_k = u_{10} \times \frac{1 - 2^{n-9}}{1 - 2} = 2^{90}(2^{n-9} - 1)$
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique, cherchons le point fixe : $\ell = -2\ell - 9$ ssi $\ell = -3$. Posons alors $\ell = -3$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= -2u_n - 9 \\ \ell &= -2\ell - 9 \end{cases}$, en faisant la différence, on obtient que $u_{n+1} - \ell = -2(u_n - \ell)$. Ceci montre que la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2 . Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \ell = (-2)^{n-2}(u_2 - \ell)$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6(-2)^{n-2} - 3$. Par linéarité de la somme et somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=2}^n 6(-2)^{k-2} - 3 = \sum_{k=2}^n 6(-2)^{k-2} - \sum_{k=2}^n 3 = 6 \times \frac{1 - (-2)^{n-1}}{1 - (-2)} - 3(n - 1) = (-2)^n - 3n + 5$$

-
- En effet $a_n = n \exp(n \ln(3/4))$ et par croissance comparée, on sait que $x \exp(x \ln(3/4)) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ car $\ln(3/4) < 0$.
 - Moralité : le $5/2$ l'emporte toujours sur le $3/2$.

5. La suite $(u_n)_n$ est une suite réelle récurrente linéaire d'ordre deux à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 = 2r - 2$, soit $r^2 - 2r + 2 = 0$. Le discriminant est $4 - 8 = -4 = (2i)^2$, ainsi les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $r_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$. Donc $|r_1| = \sqrt{2}$, et $r_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\sqrt{2})^n \left(A \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + B \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

De plus, pour $n = 0$, on obtient $A = 1$, pour $n = 1$, on a $1 = \sqrt{2}(A/\sqrt{2} + B/\sqrt{2})$ donc $B = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)$.

6. L'équation caractéristique est $r^2 = 6r - 9$ soit $r - 6r + 9 = 0$ dont 3 est solution double. Ainsi, l'ensemble des suites vérifiant la relation est :

$$\{((An + B)3^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} = \{A(n3^n)_{n \in \mathbb{N}} + B(3^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((n3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Ainsi, $\mathcal{B} = ((n3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une famille génératrice de l'ensemble des suites vérifiant la relation demandée. Montrons que c'est une famille libre. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $a(n3^n)_{n \in \mathbb{N}} + b(3^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ (suite nulle). Cela veut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $an3^n + b3^n = 0$. En particulier, pour $n = 0$, il vient $b = 0$, puis pour $n = 1$, il vient $3a = 0$ donc $a = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre et est donc une base de l'ensemble des suites vérifiant la relation demandée.

7. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
 $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \quad \text{et} \quad |u_n - \ell| > \varepsilon$

8. (a) `def BsuiteU(n):`

```
    u = 3# valeur de u_0
    for i in range(1,n+1):
        u = (u - 3)**2#calcul de u_i à partir de la valeur de u_{i-1}
    return u
```

- (b) `def RSuiteU(n):`

```
    if n == 0:
        return 3
    else:
        a = RSuiteU(n-1)#on calcule u_{n-1}
        return (a - 3)**2# calcul de u_n à partir de u_{n-1}
```

- (c) À la fin de la i -ième itération $u = u_i$. En effet, pour $i = 1$, $u = (u_0 - 3)^2 = u_1$. Et raisonnons par récurrence, si à la i -ième itération, on a $u = u_i$, alors la $i + 1$ -ième itération $u = (u_i - 3)^2 = u_{i+1}$. Ainsi, $u = u_i$ est un invariant de boucle. Pour la seconde, n est un variant de récursivité, il décroît strictement jusqu'à atteindre 0, valeur pour laquelle l'algorithme renvoie une valeur.

- (d) `def Seuil(A):`

```
    n = 0
    u = 3
    while u < A:
        u = (u-3)**2
        n = n+1
    return n
```

9. (a) **Faux !** Cela ressemble à la conservation des inégalités larges par passage à la limite, mais ici ce résultat est faux ! En effet, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ n'ont pas nécessairement de limite, donc l'inégalité entre limites n'a pas de sens si on prend, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 58 + \sin(n)$.

- (b) **Faux !** La suite $\left(3 + \frac{1}{(n+1)}\right)_n$ est décroissante et minorée par 0 elle ne converge pourtant pas vers 0.

- (c) **Faux !** Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3 + \exp(-n)$, $v_n = 2$ et $w_n = 5 + \frac{1}{n+1}$, alors les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers des limites différentes, mais cela n'empêche pas $(v_n)_n$ de converger.

- (d) **Vrai !** C'est le théorème des suites extraites appliquée à $\varphi: n \mapsto 2n$ et $\psi: n \mapsto 2n + 1$ deux (célèbres) fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

- (e) **Faux !** Si les deux suites ne convergent pas vers la même limite, alors $(u_n)_n$ diverge. Considérer par exemple $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (f) **Vrai !** car $\frac{n^2}{n^3} = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

- (g) **Faux !** car $\frac{n^3}{n^2} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

(h) **Vrai !** car $\left(\frac{n^2}{n^3}\right)_n$ admet une limite finie (qui est 0) donc est bornée.

(i) **Faux !** car le quotient vaut $1/n$ et ne tend pas vers 1.

(j) **Faux !** par exemple $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais diverge.

(k) **Vrai !** C'est du cours !

(l) **Faux !** Le cours assure que $(u_n)_n$ est monotone mais pas forcément croissante. Considérons $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{2} \end{cases}$ (fonction croissante) et $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(u_0) = 1/2 < u_0$, ainsi la suite $(u_n)_n$ (qui est en fait la suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme 1) n'est pas croissante.